Система M|G|1|K с периоди на възстановяване и подготовка на прибора

доц. д-р Митко Димитров
УНСС, катедра „Математика"
e-mail: mcdimitrov@abv.bg
ас. Мирослава Иванова
УНСС, катедра „Математика"

Резюме: Изучена е еднолинейна система на масово обслужване MIGI1IK с Поасонов входящ поток, краен брой места за чакане, възстановяване на прибора и времето на обслужване зависи от дължината на опашката в началния момент на обслужване. Като се използва детерминираният подход за анализ на една реализация на процеса на обслужване е намерено стационарно разпределение на дължината на опашката и остатъчното време на обслужване.

Ключови думи: M|G|1|K с време на възстановяване, дължина на опашката и остатъчно време на обслужване.

JEL: C6, C65.

Увод

Системите за масово обслужване от вида MIGI1IK намират голямо приложение при моделиране на комуникационни и производствени системи. В настоящата работа е изучена еднолинейна система на масово обслужване с Поасонов входящ поток от заявки и краен брой места за чакане. Дисциплината на обслужване е FCFS. Времената на обслужване зависят от дължината на опашката в началния момент на обслужването. След всеки период на заетост приборът започва да се възстановява. Разгледани са два вида възстановяване на прибора. Ако в края на периода на възстановяване в системата има заявки, започва периодът за подготовка на прибора за обслужване. Като се използва детерминираният подход [1], [2], за анализ на една реализация на подходящо дефиниран случаен процес са получени редица характеристики на системата като стационарно разпределение на дължината на опашката и остатъчно време на възстановяване, подготовка за обслужване или време на обслужване на заявката от гледна точка на случайно избрана постъпила в системата или приета за обслужване заявка.

1. Постановка на задачата.

Входящият поток от заявки в еднолинейна система на обслужване е Поасонов с интензивност λ. Времената на обслужване са независими от входящия поток и помежду си случайни величини, с функция на разпределение $G_i(x)$ и с математическо очакване $\frac{1}{\mu_i}$, ако дължината на опашката в системата в началния момент на обслужване на текущата заявка е равна на i. Системата има капацитет от K места за приетите за обслужване заявки, включително и заявката, която се обслужва, ако има такава. Една пристигнала заявка се приема в системата за обслужване само ако има поне едно свободно място за чакане от всичките $K-1$ на брой места за чакане в системата. В противен случай заявката се губи веднага, без да получи обслужване.

Всеки път, когато завърши периодът на заетост на прибора, същият започва да се възстановява. Да предположим, че времето на първото възстановяване на прибора е случайна величина с функция на разпределение $U(x)$ и с математическо очакване $\frac{1}{\hat{\mu}_U}$. Когато за времето на първото възстановяване (exceptional vacation) в системата не постъпи нито една заявка, то започва следващият период на възстановяване с функция на разпределение $V_0(x)$ и математическо очакване $\frac{1}{\hat{\mu}_0}$.

Всеки път, когато приборът приключи поредния период на възстановяване, същият започва следващия период на възстановяване, ако в системата няма нито една заявка. В противен случай, ако в системата има поне една заявка, започва периодът на подготовка на прибора за обслужване на заявките. Така ще различаваме два вида периоди на възстановяване на прибора. Първият вид възстановяване започва веднага след приключването на периода на заетост, а вторият вид възстановяване следва приключването на предходния период на възстановяване, ако в началото му в системата няма заявки. Времената на подготовка на прибора за обслужване са независими случайни величини – както помежду си, така и от входящия поток от заявки и от времената на обслужване на заявките с функция на разпределение $V_i(x)$ и математическо очакване $\frac{1}{\hat{\mu}_i}$, ако в началния момент на подготовката на прибора за обслужване в системата има i заявки.

2. Вложена Марковска верига.

С $Q = \{Q_k, k \geq 0\}$ означаваме дължината на опашката в началните моменти на възстановяване, подготовка на прибора за обслужване или обслужване на заявка. Ще покажем, че редицата от състояния $Q_k, k \geq 0$ образува Марковска верига. С $\tilde{0}$ и $\hat{0}$ означаваме нулевите дължини на опашката в системата съответно в началния момент на възстановяване на прибора от първи и втори вид. С $\hat{i}$ и i означаваме съответно дължината на опашката от i заявки в началния момент на подготовката на прибора за обслужване или за обслужване на заявка. В системата може да има най-много K заявки. Затова $\hat{i} \in \{\hat{1}, \hat{2}, ..., \hat{K}\}$ докато в началния момент на обслужване на заявка в системата може да има най-много $K-1$ заявки и $i \in \{1, 2, ..., K-1\}$. Понеже входящият поток от заявки е Поасонов, а времената на възстановяване на прибора, времената на подготовка на прибора и времената на обслужване на заявките са независими случайни величини, то редицата $Q_k, k \geq 0$ от дължината на опашката в разглежданите начални моменти образува Марковска верига. Вероятностите на преход от състояние в състояние са:

$P_{\tilde{0}\tilde{0}} = 0 \quad P_{\tilde{0}0} = \tilde{a}_0 \quad P_{\tilde{0}\hat{1}} = \tilde{a}_i$ при $1 \le \hat{1} \le \hat{K} - 1, \; P_{\tilde{0}\hat{K}} = \tilde{A}_K$

$P_{\tilde{0}i} = 0$ при $0 \le i \le K - 1,$

$P_{\hat{0}\tilde{0}} = 0, \; P_{\hat{0}0} = \hat{a}_0, \; P_{\hat{0}\hat{1}} = \hat{a}_i$ при $1 \le i \le K - 1, P_{\hat{0}K} = \hat{A}_K, P_{\hat{0}i} = 0, \; 1 \le i \le K - 1$

$P_{\hat{i}\hat{j}} = 0, \hat{i}, \hat{j} \in \{\hat{1}, \hat{2}, ..., \hat{K}\}, P_{\hat{i}\tilde{0}} = 0, \hat{i} \in \{\hat{1}, \hat{2}, ..., \hat{K}\}$

$P_{\hat{i}i-1} = \hat{a}_0(i), P_{\hat{i}i} = \hat{a}_1(i), ..., P_{\hat{i}K-2} = \hat{a}_{K-1-i}(i), P_{\hat{i}K-1} = \hat{A}_{K-i}(i)$ при $\hat{i} \in \{\hat{1}, ..., \hat{K}\}$

$P_{\hat{K}\tilde{0}} = P_{\hat{K}\hat{j}} = 0, \; j = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \hat{K}\}, P_{\hat{K}j} = 0, \; j = \{0, 1, 2, ..., K-2\}, \; P_{\hat{K},K-1} = 1$

и $P_{0\tilde{0}} = a_0(0), \; P_{0j} = a_{j+1}(0)$ при $0 \le j \le K - 2,$

$P_{0,K-2} = A_{K-1}(0), \; P_{0K-1} = 0, \; P_{i\tilde{0}} = 0,$

$P_{i\tilde{0}} = 0, P_{i\hat{j}} = 0, i = \{1, 2, ..., K - 1\}, \hat{j} = \{\hat{1}, \hat{2}, ..., \hat{K}\}, \; P_{1j} = a_j(1)$ при $0 \le j \le K - 3,$

$P_{1,K-2} = A_{K-1}(1), \; P_{ij} = 0$ при $i = 2, ..., K - 2, \; j = 0, ..., i - 2.$

$P_{i,i-1} = a_0(i), \; P_{ii} = a_1(i), ..., P_{i,K-3} = a_{K-i-2}(i),$

$P_{i,K-2} = A_{K-i-1}(i)$ и $P_{i,K-1} = 0$ при $i = 2, ..., K - 2.$

Накрая $P_{K-1,\tilde{0}} = P_{K-1,\hat{0}} = P_{K-1,\hat{i}} = P_{K-1,j} = 0$ при $\hat{i} \in \{\hat{1}, \hat{2}, ..., \hat{K}\},$

$j = 0, 1, ..., K - 3$ и $P_{K-1,K-1} = 0, P_{K-1,K-2} = 1,$

където:

$$\tilde{a} = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^i e^{-\lambda x}}{i!} dU(x), \; \hat{a}_i = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^i e^{-\lambda x}}{i!} dV_0(x),$$

$$\hat{a}_i(e) = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^i e^{-\lambda x}}{i!} dV_e(x), \; e = 1, 2, ..., K; \; a_i(e) = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^i e^{-\lambda x}}{i!} dG_e(x),$$

$$\tilde{A}_K = \sum_{i=K}^\infty \tilde{a}_i, \; \hat{A}_K = \sum_{i=K}^\infty \tilde{a}_i, \; \hat{A}_i(e) = \sum_{j=i}^\infty \hat{a}_j(e), \; A_i(e) = \sum_{j=i}^\infty a_j(e).$$

Стационарното разпределение на Марковската верига Q се получава като решение на системата линейни уравнения $\sigma Q = 0$ и условието за нормировка $\sigma e = 1$. И така получаваме системата уравнения:

$$\sigma_{\tilde{0}} = \sigma_0 a_0(0)$$
$$\sigma_{\hat{0}} = \sigma_{\tilde{0}}\tilde{a}_0 + \sigma_{\hat{0}}\hat{a}_0$$
$$\sigma_{\hat{1}} = \sigma_{\tilde{0}}\tilde{a}_1 + \sigma_{\hat{0}}\tilde{a}_1$$
$$\vdots$$
$$\sigma_{\hat{K}} = \sigma_{\tilde{0}}\tilde{A}_K + \sigma_{\hat{0}}\hat{A}_K$$
$$\sigma_0 = \sigma_{\hat{1}}\hat{a}_0(1) + \sigma_0 a_1(0) + \sigma_1 a_0(1)$$
$$\sigma_1 = \sigma_{\hat{1}}\hat{a}_1(1) + \sigma_{\hat{2}}\hat{a}_0(2) + \sigma_0 a_2(0) + \sigma_1 a_1(1) + \sigma_2 a_0(2)$$
$$\vdots$$
$$\sigma_i = \sigma_{\hat{1}}\hat{a}_i(1) + \sigma_{\hat{2}}\hat{a}_{i-1}(2) + \dots + \sigma_{\hat{i}}\hat{a}_1(i) + \sigma_{\widehat{i+1}}\hat{a}_0(i+1) + \sigma_0 a_{i+1}(0) + \sigma_1 a_i(1) + \dots +$$
$$+ \sigma_i a_1(i) + \sigma_{i+1} a_0(i+1)$$
$$\vdots$$
$$\sigma_{K-2} = \sigma_{\hat{1}}\hat{a}_{K-2}(1) + \sigma_{\hat{2}}\hat{a}_{K-3}(2) + \dots + \sigma_{\widehat{K-1}}\hat{a}_0(K-1) + \sigma_0 a_{K-1}(0) + \sigma_1 A_{K-2}(1) + \dots +$$
$$+ \sigma_{K-1} A_0(K-1)$$
$$\sigma_{K-1} = \sigma_{\hat{1}}\hat{A}_{K-1}(1) + \sigma_{\hat{2}} A_{K-2}(2) + \dots + \sigma_{\hat{K}}\hat{A}_0(K-1)$$
$$\sigma_{\tilde{0}} + \sum_{l=0}^{K}\sigma_{\hat{l}} + \sum_{i=0}^{K-1}\sigma_i = 1\,.$$

Като разделим двете страни на уравненията от системата $\sigma P = \sigma$ на σ_0, получаваме следната рекурентна връзка между

$$x_{\tilde{0}} = \frac{\sigma_{\tilde{0}}}{\sigma_0},\ x_{\hat{0}} = \frac{\sigma_{\hat{0}}}{\sigma_0},\ x_{\hat{i}} = \frac{\sigma_{\hat{i}}}{\sigma_0},\ i \in \{\hat{1}, \dots, \hat{K}\}$$

и $x_{\hat{i}} = \dfrac{\sigma_i}{\sigma_0}$, $i = 1, 2, \dots K-1$.

$$x_{\tilde{0}} = a_0(0),$$
$$x_{\hat{0}} = \frac{1}{1-\hat{a}_0} x_{\tilde{0}}\tilde{a}_0\ ,$$
$$x_{\hat{1}} = x_{\tilde{0}}\tilde{a}_1 + x_{\tilde{0}}\hat{a}_1$$
$$\vdots$$

$$x_{\hat{\imath}} = x_{\tilde{0}}\tilde{a}_{i} + x_{\hat{0}}\hat{a}_{i}$$
$$\vdots$$
$$x_{\hat{K}} = x_{\tilde{0}}\tilde{A}_{K} + x_{\hat{0}}\hat{A}_{K}$$
$$x_{1} = \frac{1}{a_{0}(1)}[1 - a_{1}(0) - x_{\hat{1}}\hat{a}_{0}(1)]$$
$$\vdots$$
$$x_{i+1} = \frac{1}{a_{0}(i+1)}[x_{i} - a_{i+1}(0) - \sum_{l=1}^{i} x_{l}a_{i-l+1}(l) - \sum_{l=1}^{i+1} x_{\hat{l}}\hat{a}_{i+1-l}(l)]$$

при $1 \le i \le K - 2$.

От условието за нормировка определяме

$$\sigma_{0} = [1 + x_{\hat{0}} + x_{\tilde{0}} + \sum_{i=1}^{K} x_{\hat{\imath}} + \sum_{i=1}^{K-1} x_{i}]^{-1},$$

което дава възможност да се определи стационарното разпределение на вложената Марковска верига, $\sigma_{\hat{\imath}} = x_{\hat{\imath}}\sigma_{0}$, $\hat{\imath} \in \{0, ..., K\}$, $\sigma_{i} = x_{i}\sigma_{0}$, $0 \le i \le K - 1$.

3. Случаен процес Z(t)

Чрез $L(t)$ означаваме броя на заявките в системата в момента t, а $I(t) = 0, 1, 2, 3$, ако в момента t съответно: приборът е зает с обслужване; приборът се възстановява от първи вид, от втори вид или се подготвя за обслужване.

Случайният процес $Z(t)$ се задава с равенството

$$Z(t) = \{I(t), L(t), R(t)\}, \quad (1)$$

където с $R(t)$ означаваме остатъчното време на обслужване, ако $\xi(t) = 0$, остатъчното време за възстановяване на прибора, ако $I(t) = 1$ или 2, и остатъчното време за подготовка на прибора за обслужване, ако $I(t) = 3$.

За да изучим стационарното разпределение на случайния процес $Z(t)$ ще разгледаме случайния процес

$$Z^{+}(t) = \{I(t), Q_{s}(t), Q_{a}(t), R(t)\}, \quad (2)$$

където:

$Q_{s}(t)$ е състоянието на вложената Марковска верига в началния момент на текущия период на възстановяване, подготовка или обслужване;

$Q_a(t)$ – броят на заявките, които постъпват в системата (в това число и онези, които не се приемат в системата и се губят).

Очевидно, ако $I(t) = 0$, то $L(t) = 1 + Q_s(t) + \min\{Q_a(t), K - 1 - Q_s(t)\}$, при $I(t) = 1$ или 2, $L(t) = Q_a(t)$ и при $I(t) = 3$, $L(t) = Q_s(t) + \min\{Q_a(t), K - Q_s(t)\}$.

Ще изучим случайния процес $Z^+(t)$ от гледна точка на случайно избрана пристигнала заявка. В даден момент t ще казваме, че случайният процес $Z^+(t)$ се намира в състояние θ_0^+ или $\hat{\theta}_0^+$, ако $L(t) = 0$, а $I(t)$ е равно съответно на 1 или 2. С $\tilde{\theta}_{0j}^+(x)$ и $\hat{\theta}_{0j}^+(x)$ означаваме съответно състоянието на случайния процес $Z^+(t)$, ако $I(t) = 1$, $Q_a(t) = j$, $R(t) \le x$ или $I(t) = 2$, $Q_a(t) = j$, $R(t) \le x$.

Аналогично с $\hat{\theta}_{ij}^+(x)$ и $\theta_{ij}^+(x)$ означаваме състоянието на процеса $Z^+(t)$, ако съответно $I(t) = 3$, $Q_s(t) = i$, $Q_a(t) = j$ и $R(t) \le x$, $1 \le i \le K$, $j \ge 0$, $x \ge 0$ или $I(t) = 0$, $Q(t) = i$, $Q_a(t) = j$ и $R(t) \le x$, $1 \le i \le K$, $j \ge 0$, $x \ge 0$.

Ще предполагаме, че траекториите на процеса $Z^+(t)$ са непрекъснати от ляво, така че, ако с $\{A_k, k \ge 1\}$ означим моментите на постъпване на заявките, то $Z^+(A_k)$ е състоянието на процеса Z^+, видяно от k-та по ред постъпила в системата заявка.

Да разгледаме следните средни величини, свързани с процеса Z^+

$$\tilde{\alpha}_{0,j}^+(x) \equiv \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_{\tilde{\theta}_{0,j}^+(x)}(Z^+(A_k)),\ j \ge 0 \tag{3}$$

$$\hat{\alpha}_{i,j}^+(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_{\hat{\theta}_{ij}^+(x)}(Z^+(A_k)),\ 0 \le i \le K,\ j \ge 0 \tag{4}$$

$$\alpha_{ij}^+(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_{\theta_{ij}^+(x)}(Z^+(A_k)),\ 0 \le i \le K-1,\ j \ge 0 \tag{5}$$

където с $1_\theta(.)$ означаваме индикатора на състоянието θ. Ще предполагаме, че тези граници са константи с вероятност единица и не зависят от началното състояние на процеса $Z^+(t)$. Множителят $\frac{1}{n}$ може да се интерпретира за всяка траектория на $Z^+(t)$, като вероятност да се избере по случаен начин една от първите n постъпили в системата заявки, докато $1_\theta(Z^+(A_k))$, $1 \le k \le n$ ще бъде условната вероятност за k-та заявка, ако бъде избрана, да види процеса Z^+ в състояние θ. Затова при $n \to \infty$ въведените по-горе граници задават вероятностите на състоянията на $Z^+(t)$, видяни от случайно избрана постъпила в системата заявка. Понеже всички постъпващи в системата заявки са блокирани (прибора винаги е зает), то стационарното разпределение на $Z^+(t)$ от гледна точка на постъпилите в системата заявки съвпада със стационарното разпределение от гледна точка на блокираните заявки.

Ние ще казваме, че процесът Z^+ е в състояние $\tilde{\theta}_{0.}^+(\infty)$, $\hat{\theta}_{0.}^+(\infty)$, $\hat{\theta}_{i.}^+(\infty)$, $1 \le \hat{i} \le \hat{K}$, $\theta_{i.}^+(\infty)$, $1 \le i \le K$, ако в момента t съответно $I(t) = 1$, $I(t) = 2$, $I(t) = 3$, и $Q_s(t) = 0$, $I(t) = 0$, и $Q_s(t) = i$, $0 \le i \le K-1$.

Чрез $1_{\tilde{0}.}(k)$, $1_{\hat{0}.}(k)$, $1_{\hat{i}.}(k)$ и $1_{i.}(k)$ означаваме индикаторите на събитието, процесът Z^+ да се намира съответно в състояние $\tilde{\theta}_{0.}^+(\infty)$, $\hat{\theta}_{0.}^+(\infty)$, $\hat{\theta}_{i.}^+(\infty)$, $1 \le \hat{i} \le \hat{K}$, $\theta_{i.}^+(\infty)$, $0 \le i \le K-1$.

Да разгледаме редицата от интервали на възстановяване на прибора от първи вид. С $1_{.j/\tilde{0};x}(k)$ ще означим индикатора на събитието, от N_k заявки, постъпили по време на k-тия по ред интервал на възстановяване на прибора от първи вид, има една заявка, която ние наричаме $(j + 1)$-ва и в момента на постъпване намира процеса Z^+ в състояние $\theta^+_{.j/\tilde{0}}(x)$, което означава, че $Q_a(t) = j$, $R(t) \le x$, $x \ge 0$ и $I(t) = 1$.

Аналогично могат да се дефинират състоянията $\hat{\theta}^+_{.j/\hat{i}}(x)$, $0 \le \hat{i} \le \hat{K}$, $\theta^+_{.j/i}(x)$ и техните индикатори съответно $1_{.j/\hat{i};x}(k)$ и $1_{.j/i;x}(k)$.

Чрез $\tilde{\beta}^+_{0j}(x)$, $\hat{\beta}^+_{ij}(x)$ и $\beta^+_{ij}(x)$ означаваме съответно величините

$$\tilde{\beta}^+_{0j}(x) \equiv \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} 1_{\tilde{0}j;x}(k)}{\sum_{k=1}^{n} N_k} \qquad (6)$$

$$\hat{\beta}^+_{ij}(x) \equiv \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} 1_{\hat{i}j;x}(k)}{\sum_{k=1}^{n} N_k},\ 0 \le \hat{i} \le K, \qquad (7)$$

$$\beta^+_{ij}(x) \equiv \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} 1_{i,j;x}(k)}{\sum_{k=1}^{n} N_k},\ 0 \le i \le K-1, \qquad (8)$$

където:

$$1_{\tilde{0}j;x}(k) = 1_{\tilde{0}.}(k)1_{.j/\tilde{0};x}(k),$$
$$1_{\hat{i}j;x}(k) = 1_{\hat{i}.}(k)1_{.j/\hat{i};x}(k),\ 1 \le \hat{i} \le \hat{K},$$
$$1_{ij;x}(k) = 1_{i.}(k)1_{.j/i;x}(k),\ 0 \le i \le K-1.$$

Величината $\tilde{\beta}^+_{0j}(x)$ може да се интерпретира като пропорция (или относителна честота) на постъпилите в системата заявки или блокираните заявки, които намират процеса в състояние $\tilde{\theta}^+_{0j}(x)$. Аналогична интерпретация допускат и останалите величини $\hat{\beta}^+_{ij}(x)$ и $\beta^+_{ij}(x)$. За да определим величините (6), (7) и (8), е необходимо да се въведат и относителните честоти

$$\tilde{\beta}^+_{0.}(\infty) \equiv \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} 1_{\tilde{0}}(k) N_k}{\sum_{k=1}^{n} N_k}, \qquad (9)$$

$$\hat{\beta}^{+}_{i.}(\infty) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} 1_{\hat{i}.}(k) N_k}{\sum_{k=1}^{n} N_k}, \tag{10}$$

$$\beta^{+}_{i}(\infty) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} 1_{i.}(k) N_k}{\sum_{k=1}^{n} N_k}. \tag{11}$$

Последните три величини (9), (10) и (11) също допускат вероятностна интерпретация. Например $\tilde{\beta}^{+}_{0.}(\infty)$ е пропорцията или относителната честота на постъпващите заявки, които намират системата в състояние $\tilde{\theta}^{+}_{0.}(\infty)$. Аналогична интерпретация допускат и величините $\hat{\beta}^{+}_{i.}(\infty)$ и $\beta^{+}_{i}(\infty)$ съответно за състоянията $\hat{\theta}^{+}_{i.}(\infty)$ и $\theta^{+}_{i.}(\infty)$.

Ако интерпретираме целочислените случайни величини N_K като време на престой съответно в състояние $\tilde{0}$, $\hat{0}$, $\hat{i}$ или i на Полумарковски процес с дискретно време, ще получим

$$\tilde{\beta}^{+}_{0.}(\infty) = \sigma_{\tilde{0}} \cdot \frac{\lambda}{\mu_U}[\sigma_{\tilde{0}}\frac{\lambda}{\mu_U} + \sigma_{\hat{0}}\frac{\lambda}{\hat{\mu}_0} + \sum_{\hat{i}=1}^{K}\sigma_{\hat{i}}\frac{\lambda}{\hat{\mu}_i} + \sum_{i=0}^{K-1}\sigma_{i}\frac{\lambda}{\mu_i}]^{-1} = \sigma_{\tilde{0}}\tilde{\rho}[\sigma_{\tilde{0}}\tilde{\rho} + \sum_{\hat{i}=0}^{K}\sigma_{\hat{i}}\hat{\rho}_i + \sum_{i=0}^{K-1}\sigma_{i}\rho_i]^{-1} \tag{12}$$

$$\hat{\beta}^{+}_{i.}(\infty) = \sigma_{\hat{i}}\tilde{\rho}_0[\sigma_{\tilde{0}}\tilde{\rho} + \sum_{i=0}^{K}\sigma_{\hat{i}}\hat{\rho}_i + \sum_{i=0}^{K-1}\sigma_{i}\rho_i]^{-1} \text{ при } 0 \le i \le K \tag{13}$$

и

$$\beta^{+}_{i.}(\infty) = \sigma_{i}\rho_i[\sigma_{\tilde{0}}\tilde{\rho} + \sum_{i=0}^{K}\sigma_{\hat{i}}\hat{\rho}_i + \sum_{i=0}^{K-1}\sigma_{i}\rho_i]^{-1} \text{ при } 0 \le i \le K-1, \tag{14}$$

където:

$$\rho_{\tilde{0}} = \frac{\lambda}{\mu_U},\ \hat{\rho}_i = \frac{\lambda}{\hat{\mu}_i},\ 0 \le i \le K,\ \rho_i = \frac{\lambda}{\mu_i}\ \ 0 \le i \le K-1.$$

За да определим $\tilde{\beta}^{+}_{0,j}(x)$, $\hat{\beta}^{+}_{i,j}(x)$ и $\beta^{+}_{ij}(x)$, ще разгледаме отношенията:

$$\frac{\tilde{\beta}^{+}_{0j}(x)}{\tilde{\beta}^{+}_{0.}(\infty)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sum_{k=1}^{n} 1_{\tilde{\theta},j;x}(k)}{\sum_{k=1}^{n} N_k}}{\dfrac{\sum_{k=1}^{n} 1_{\tilde{\theta}.}(k) N_k}{\sum_{k=1}^{n} N_k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} 1_{\tilde{\theta},j;x}(k)}{\sum_{k=1}^{n} 1_{\tilde{\theta}.}(k) N_k} \tag{15}$$

$$\frac{\hat{\beta}^{+}_{i,j}(x)}{\tilde{\beta}^{+}_{i.}(\infty)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sum_{k=1}^{n} 1_{\hat{i}j;x}(k)}{\sum_{k=1}^{n} N_k}}{\dfrac{\sum_{k=1}^{n} 1_{\hat{i}.}(k) N_k}{\sum_{k=1}^{n} N_k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} 1_{\hat{i}j;x}(k)}{\sum_{k=1}^{n} 1_{\hat{i}.}(k) N_k} \tag{16}$$

$$\frac{\beta^{+}_{ij}(x)}{\tilde{\beta}^{+}_{i.}(\infty)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sum_{k=1}^{n} 1_{ij;x}(k)}{\sum_{k=1}^{n} N_k}}{\dfrac{\sum_{k=1}^{n} 1_{i.}(k) N_k}{\sum_{k=1}^{n} N_k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} 1_{i,j;x}(k)}{\sum_{k=1}^{n} 1_{i.}(k) N_k}\,. \tag{17}$$

Забелязваме че, ако $1_{\tilde{0}.}(k) = 0$, то $1_{\tilde{0},j;x}(k)$ също е равно на нула. Затова, ако пропуснем онези събираеми в числителя и знаменателя на дясната страна на (15), за които $1_{\tilde{0}.}(k) = 0$, то получаваме

$$\frac{\tilde{\beta}^{+}_{0j}(x)}{\tilde{\beta}^{+}_{0.}(\infty)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{l=1}^{m} l_{\tilde{0}j;x}(k_l)}{\sum_{l=1}^{m} l_{\tilde{0}.}(k_l) N_{k_l}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{l=1}^{m} l_{.j/\tilde{0};x}(k_l)}{\sum_{l=1}^{m} N_{k_l}}\,,$$

където $\{k_l, l = 1, 2, ...\}$ е редицата от номера на подмножеството от индексите $k = 1, 2, ...$, за които $1_{\tilde{0}.}(k) = 1$. Редицата $\{N_{k_l}, l = 1, 2, ...\}$е редица от еднакво разпределени независими случайни величини, с които се задава броят на постъпилите в системата заявки за времената на възстановяване от първи вид. В случая с $1_{.j/\tilde{0};x}(k_l)$ сме означили индикатора на събитието: от всичките N_{k_l} постъпили заявки по време на периода на възстановяване от първи вид, има заявка, която в момента на постъпване намира в системата j заявки, постъпили от началото на периода на възстановяване от първи вид и времето до неговото завършване е не повече от l. Тогава по закона за големите числа получаваме равенството

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sum_{l=1}^{m} l_{.j/\tilde{0};x}(k)}{m}}{\dfrac{\sum_{l=1}^{m} N_{k_l}}{m}} = \frac{E1_{.j/\tilde{0};x}(1)}{EN_{k_l}}\,,$$

където

$$E1_{.j/\tilde{0};x}(1) = P(1_{.j/\tilde{0};x}(1) = 1) = \int_0^\infty [U(x+y) - U(y)].\frac{(\lambda y)^j e^{-\lambda y}}{j!}.\lambda dy \text{ и } EN_{k_e} = \frac{\lambda}{\mu_U} = \tilde{\rho}$$

Затова

$$\frac{\tilde{\beta}^+_{0j}(x)}{\tilde{\beta}^+_{0.}(\infty)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^\infty [U(x+y) - U(y)].\frac{(\lambda y)^j e^{-\lambda y}}{j!}.\lambda dy}{\frac{\lambda}{\mu_U}} =$$

$$= \mu_U \int_0^\infty [U(x+y) - U(y)].\frac{(\lambda y)^j e^{-\lambda y}}{j!} dy \equiv \tilde{v}_{0,j}(x) \qquad (18)$$

Аналогично може да се докаже, че от (16) и (17) следва

$$\frac{\hat{\beta}^+_{i,j}(x)}{\hat{\beta}^+_{i.}(\infty)} = \mu_i \int_0^\infty [V_i(x+y) - V_i(y)].\frac{(\lambda y)^j e^{-\lambda y}}{j!} dy \equiv \hat{v}_{i,j}(x) \text{ , } 0 \le \hat{i} \le K,\ 0 \le j \le \infty \qquad (19)$$

$$\frac{\beta^+_{i,j}(x)}{\beta^+_{i.}(\infty)} = \mu_i \int_0^\infty [G_i(x+y) - G_i(y)].\frac{(\lambda y)^j e^{-\lambda y}}{j!} dy \equiv v_{i,j}(x) \text{ , } 0 \le i \le K-1,\ j \ge 0 \qquad (20)$$

Да означим с η вероятността постъпила в системата произволна заявка да се приеме за обслужване. Тогава потокът от заявки, приети за обслужване в системата, е също така Поасонов с интензивност $\lambda\eta$. Тъй като средното време за обслужване на една заявка е

$$\sum_{i=0}^{K-1} \sigma_i . \frac{1}{\mu_i} \text{ ,}$$

то коефициентът на натовареност на системата ще бъде равен на

$$B = \lambda\eta \sum_{i=0}^{K-1} \sigma_i . \frac{1}{\mu_i} .$$

От друга страна,

$$B = \frac{\sum_{i=0}^{K-1} \sigma_i . \frac{1}{\mu_i}}{\sigma_{\tilde{0}} . \frac{1}{\tilde{\mu}} + \sum_{i=0}^{K} \sigma_{\hat{i}} . \frac{1}{\hat{\mu}_i} + \sum_{i=0}^{K-1} \sigma_i . \frac{1}{\mu_i}} \text{ , откъдето определяме}$$

$$\eta = [\sigma_{\tilde{0}} \tilde{\rho} + \sum_{i=0}^{K} \sigma_{\hat{i}} \hat{\rho}_i + \sum_{i=0}^{K-1} \sigma_i \rho_i]^{-1}. \qquad (21)$$

Сега можем да формулираме основния резултат със следващата теорема.

Теорема 1. *Разпределението на състоянията на случайния процес Z^+ видяни от случайно избрана постъпила в системата заявка с вероятност единица, се задава с изразите*

$$\tilde{\alpha}^+_{0j}(x) = \eta\sigma_{\tilde{0}}\tilde{\rho}\nu_{\tilde{0};j}(x) \tag{22}$$

$$\hat{\alpha}^+_{i,j}(x) = \eta\sigma_{\hat{i}}\hat{\rho}_i\hat{\nu}_{i,j}(x) \text{ , при } \hat{i} = \hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, ..., \hat{K} \tag{23}$$

$$\alpha^+_{ij}(x) = \eta\sigma_i\rho_i\nu_{i,j}(x) \text{ , при } i = 0, 1, 2, ..., K-1, j \geq 0, x \geq 0 \tag{24}$$

Доказателство:

От $\tilde{\beta}^+_{0.}(\infty) = \sigma_{\tilde{0}}\tilde{\rho}[\sigma_{\tilde{0}}\tilde{\rho} + \sum_{\hat{i}=0}^{K}\sigma_{\hat{i}}\hat{\rho}_i + \sum_{i=0}^{K-1}\sigma_i\rho_i]^{-1}$ (виж (12)) и $\tilde{\beta}^+_{0j}(x) = \tilde{\beta}^+_{0.}(\infty)\tilde{\nu}_{0,i}(x)$ (виж (18)) следва $\tilde{\beta}_{0j}(x) = \sigma_{\tilde{0}}\tilde{\rho}[\sigma_{\tilde{0}}\tilde{\rho} + \sum_{i=0}^{K}\sigma_{\hat{i}}\hat{\rho}_i + \sum_{i=0}^{K-1}\sigma_i\rho_i]^{-1}\tilde{\nu}_{0,j}(x)$.

Тъй като $\eta = [\sigma_{\tilde{0}}\tilde{\rho} + \sum_{i=0}^{K}\sigma_{\hat{i}}\hat{\rho}_i + \sum_{i=0}^{K-1}\sigma_i\rho_i]^{-1}$ и $\tilde{\alpha}^+_{\tilde{0}j}(x) = \tilde{\beta}^+_{0j}(x)$, то $\tilde{\alpha}^+_{0j}(x) = \eta\sigma_{\tilde{0}}\tilde{\rho}\nu_{\tilde{0};j}(x)$.

Аналогично се доказват равенствата (23) и (24).

А сега да се върнем към процеса $Z(t)$. В даден момент t ще казваме, че процесът $Z(t)$ се намира в състояние $\tilde{\theta}_{0j}(x)$, $\hat{\theta}_{0,j}(x)$, $\hat{\theta}_{.j}(x)$ и $\theta_{.j}(x)$ ако в системата има j заявки, а $\xi(t)$ е равно съответно на $0, 1, 2$ или 3 и $R(t) \leq x$.

С $\tilde{\alpha}_{0j}(x)$, $\hat{\alpha}_{0,j}(x)$, $\hat{\alpha}_{.j}(x)$ и $\alpha_{.j}(x)$ при $0 \leq j \leq K$, ще дефинираме вероятностите случайно избрана от постъпилите в системата заявки да намери процеса $Z(t)$ съответно в състояние $\tilde{\theta}_{0j}(x)$, $\hat{\theta}_{0,j}(x)$, $\hat{\theta}_{.j}(x)$ и $\theta_{.j}(x)$.

Тогава е в сила следващата *Теорема 2*, която дава разпределението на вероятностите на състоянията на процеса $Z(t)$ видяни от случайно избрана постъпила в системата заявка.

Теорема 2. *Разпределението на вероятностите на състоянията на процеса* $Z(t)$ *видени от случайно избрана постъпила в системата заявка с вероятност единица се задава с равенствата*:

$$\tilde{\alpha}^+_{0j}(x) = \eta\sigma_{\tilde{0}}\tilde{\rho}\tilde{\nu}_{0,j} \quad \textit{при} \quad 0 \leq j \leq K-1, x \geq 0$$

$$\hat{\alpha}^+_{0,j}(x) = \eta\sigma_{\hat{0}}\hat{\rho}_0\hat{\nu}_{0,j}(x) \quad \textit{при} \quad 0 \leq j \leq K-1$$

$$\hat{\alpha}_{.j}(x) = \eta\sum_{i=1}^{j}\sigma_{\hat{i}}\hat{\rho}_i\hat{\nu}_{i,j-i}(x) \quad \textit{при} \quad 1 \leq j \leq K-1$$

$$\alpha_{.j}(x) = \eta\sum_{i=0}^{j-1}\sigma_i\rho_i\nu_{i,j-i-1}(x) \quad \textit{при} \quad 1 \leq j \leq K-1$$

$$\tilde{\alpha}_{0K}(x) = \eta\sigma_{\tilde{0}}\tilde{\rho}\sum_{j=K}^{\infty}\tilde{\nu}_{0j}(x),\ \hat{\alpha}_{0K}(x) = \eta\sigma_{\hat{0}}\hat{\rho}\sum_{j=K}^{\infty}\hat{\nu}_{0j}(x)$$

$$\hat{\alpha}_{.K}(x) = \eta\sum_{i=1}^{K}\sigma_{\hat{i}}\hat{\rho}_{i}\sum_{j=K}^{\infty}\hat{\nu}_{i,j-1}(x)$$

$$\alpha_{.K}(x) = \eta\sum_{i=1}^{K}\sigma_{i}\rho_{i}\sum_{j=K}^{\infty}\nu_{i,j-i-1}(x).$$

Ако отхвърлим загубените заявки от *Теорема 2*, може да получим вероятностното разпределение на състоянията на процеса $Z(t)$ от гледна точка на случайно избрана приета за обслужване заявка. Да означим с $\tilde{\eta}_{0j}(x)$, $\hat{\eta}_{0j}(x)$, $\hat{\eta}_{i,j}$ и $\eta_{.j}$ вероятностите случайно избрана приета за обслужване заявка да намери системата в състояние съответно $\tilde{\theta}_{0j}(x)$, $\hat{\theta}_{0,j}(x)$, $\hat{\theta}_{.j}(x)$ и $\theta_{.j}(x)$.

Понеже η е онази част от постъпилите в системата заявки, които са приети за обслужване, веднага получаваме

$$\tilde{\eta}_{0j}(x) = \frac{\tilde{\alpha}_{0j}(x)}{\eta},\ \hat{\eta}_{0j}(x) = \frac{\hat{\alpha}_{0,j}(x)}{\eta} \text{ при } 0 \le j \le K-1$$

$$\hat{\eta}_{.j}(x) = \frac{\hat{\alpha}_{.j}(x)}{\eta},\ \hat{\eta}_{.j}(x) = \frac{\hat{\alpha}_{0,j}(x)}{\eta} \text{ при } 1 \le j \le K-1.$$

Теорема 3. *Разпределението на състоянията на процеса Z видени от случайно избрана приета за обслужване заявка с вероятност единица се задава с равенствата*

$$\tilde{\eta}_{0j}(x) = \sigma_{\tilde{0}}\tilde{\rho}\tilde{\nu}_{0,j} \text{ при } 0 \le j \le K-1$$

$$\hat{\eta}_{0j}(x) = \sigma_{\hat{0}}\hat{\rho}_{0}\hat{\nu}_{0j}(x) \text{ при } 0 \le j \le K-1$$

$$\hat{\eta}_{.j}(x) = \sum_{i=1}^{j}\sigma_{\hat{i}}\hat{\rho}_{i}\hat{\nu}_{i,j-1} \text{ при } 0 \le j \le K-1$$

$$\eta_{.j}(x) = \sum_{i=1}^{j-1}\sigma_{i}\rho_{i}\nu_{i,j-1}(x) \text{ при } 0 \le j \le K-1.$$

Литература

1. Niu, S.- C. (1988) Representing Workloads in GI[G]1 Queues though the Preemptive – Resume LIFO Queue Discipline. Queuing Systems 3, 157-178;

2. Niu, S.- C., Cooper, R. B.(1993) Transform-free analysis of M[G][1]IK and Related Queues, Mathematics of Operations Research, v-18,№ 2, 486-510. ИА