Използване на актюерски модели за оценка на загубите от природни бедствия на общинско ниво

доц. д-р Пламена Златева
ИСИР – БАН, ул. „Акад. Г. Бончев",
бл. 2, п.к. 79, София 1113
e-mail: plamzlateva@abv.bg

Резюме: В статията се предлага използването на актюерски модели за оценка на потенциалните загуби от възникване на природни бедствия на общинско ниво. Представят се специфичните особености на индивидуалния модел на риска и на колективния модел на риска. Дават се формули за изчисляване на математическото очакване и дисперсията на общите загуби при двата модела.

Ключови думи: актюерски модели, индивидуален модел на риска, колективен модел на риска, природни бедствия, общи загуби.

JEL: C02, G22, H56.

1. Увод

В наши дни непрекъснато се увеличава негативното влияние на природните бедствия върху устойчивото развитие на обществото и качеството на живот [1]. В тази връзка трябва да се отбележи, че изследванията на специалистите и натрупаните статистически данни показват по-висок ръст по отношение големината на загубите от природните бедствия в сравнение с техния брой за определен период от време [2,3]. Установено е, че ключова тежест в размера на загубите имат не големите природни бедствия, а малките неблагоприятни природни явления. Това е обусловено от факта, че катастрофичните бедствия имат висока единична стойност на загубите, но стават твърде рядко. От друга страна, често се случват природни бедствия с неголям мащаб на въздействие, но общата им загуба (сумата от отделните загуби) е огромна.

Икономическите аспекти на природните бедствия не се свеждат само до причинените от тях преки и косвени загуби. Огромни разходи се изискват на държавно и общинско ниво за гарантиране нормалната дейност на системите за противодействие на отрицателните последствия при възникване на природни бедствия. Необходими са средства за превантивни мерки по предотвратяване на природните бедствия и намаляване възможните загуби от тях, както и за аварийно-спасителни и други неотложни работи в хода на ликвидацията на последствията.

Географските особености и икономическото състояние предопределят високата уязвимост на нашата страна към различни по характер природни бедствия, които могат да предизвикват значителни човешки, екологични и материални загуби. Поради това е необходимо провеждането на задълбочени научни изследвания и анализи, които да доведат до предлагането на интегрирани подходи за цялостно оценяване на потенциалните загуби при възникване на природни бедствия.

Трябва да се подчертае, че наличието на адекватна оценка за потенциалните общи загуби от природни бедствия на общинско ниво ще подпомогне вземането на по-информирани решения за ефективно планиране и използване на ограничените средства от общинския бюджет за дейности в извънредни ситуации.

Цел на настоящата статия е да предложи подход на базата на актюерски модели за оценка на загубите от природни бедствия на общинско ниво. Представят се особеностите на индивидуалния модел на риска и на колективния модел на риска и се посочват възможностите за тяхното реално приложение.

2. Особености на индивидуалния и колективния модел на риска, използвани в актюерството

Общата загуба от цялото количество застрахователни полици е сумата от всички претърпени загуби. Тази загуба може да се моделира с два подхода: индивидуален модел на риска и колективен модел на риска [4].

При **индивидуалния модел на риска** общата загуба представлява сума от загубите, породени от всички застрахователни полици [5]:

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad (1)$$

където:
S е общата загуба;
n – броят на наблюдаваните (отчитаните в модела) застрахователни полици;
X_i – загубата от i-тата застрахователна полица, $i = 1, \dots n$.

Предполага се, че загубите X_i от всяка една полица са независими и еднакво разпределени случайни величини (iid), както случайната величина X.

Така в индивидуалния модел на риска променливата S представлява сума от n iid случайни величини, където n е фиксирано число. Стойността на X_i е нула, когато няма загуби от застрахователната полица i.

При **колективния модел на риска** общата загуба се изчислява, както следва [5].

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N \quad (2)$$

където:
S е случайна величина за общата загуба, удовлетворяваща условията за съставно разпределение;
N – броят на загубите от наблюдаваните (отчитаните в модела) застрахователни полици;
X_j – размерът на j-та загуба при $j = 1, \dots, N$.

Общата загуба е нулева, $S = 0$, ако $N = 0$.

Според дефиницията S има **съставно разпределение** (compound distribution), ако X_j, $j = 1, \dots, N$ са независими и еднакво разпределени, цели неотрицателни случайни величини като всяка е разпределена, както X и ако променливата N е също цяла неотрицателна случайна величина, която е независима с величините X_j, $j = 1, \dots, N$.

Разпределението на N се нарича **първично разпределение**, а разпределението на X – **вторично разпределение**.

Необходимо е да се подчертае, че в уравнение (1) величината X_i е размер на загубата (може да е нула) от i-тата застрахователна полица, докато в уравнение (2) величината X_j е размер на j-та загуба.

Разглеждането на агрегираните (1) и (2) модели на риска има смисъл, защото по този начин може да се отчете влиянието в общите загуби, както на честотата, така и на размера на загубите по отделните застрахователни полици. Например, разширяването на застрахователния бизнес може да има влияние върху честотата, но не и върху тежестта на иска. От друга страна, контролът на разходите (или нарастването на общите разходи) и иновациите в областта на технологиите могат да влияят върху тежестта на иска, но без да имат ефект върху честота на иска. Освен това, различните застрахователни събития могат да въздействат по различен начин върху разпределенията на исковата честота и исковата тежест.

При оценка на общите загубите от природни бедствия на общинско ниво посочените актюерски модели могат да се използват по следния начин:

- Загубите X_i в индивидуалния модел на риска могат да се отнасят например за месечните загуби от определен вид природно бедствие, в случая $i = 1, \dots 12$. Ако за някой месец няма загуби от разглежданото бедствие, съответното X_i е нула.
- Загубите X_j в колективния модел на риска могат да се отнасят например за реалните загуби, поради случването на различни природни бедствия (по месеци или по години). Броят на реално възникналите природни бедствия N е неопределен, т.е. N е случайна величина.

3. Индивидуален модел на риска

Основното уравнение на индивидуалния модел на риска (1) определя общата загуба S като сума от n независими и еднакво разпределени дискретни случайни величини, всяка разпределена като X, поради това математическото очакване и дисперсията на S се дават със следните формули:

$$ES = \sum_{i=1}^{n} EX_i = nEX \text{ и } DS = \sum_{i=1}^{n} DX_i = nDX \qquad (3)$$

Следователно, за да се изчислят математическото очакване и дисперсията на S, е необходимо да се знаят математическото очакване и дисперсията на X.

Нека вероятността да има загуба е θ, а вероятността да няма загуба е $1 - \theta$. Приема се, че ако има загуба, то тя е с размер Y. Параметърът Y е положителна непрекъсната случайна величина с математическото очакване μ_Y и дисперсия σ_Y^2. От тук следва, че $X = Y$ с вероятност θ и $X = 0$ с вероятност $1 - \theta$. Тогава величината X може да се запише във вида:

$$X = IY, \qquad (4)$$

където:
I е индикаторна случайна величина (тип Бернули), която е независимо разпредена спрямо Y, така че

$$I = \begin{cases} 0, \text{ с вероятност } 1 - \theta \\ 1, \text{ с вероятност } \theta \end{cases}. \qquad (5)$$

Следователно, математическото очакване на X е

$$EX = EI.EY = \theta.\mu_Y, \qquad (6)$$

Дисперсията на X се изчислява по формулата:

$$DX = D(I.Y) = (EY)^2.DI + E(I^2).DY = \\ = \mu_Y^2.\theta.(1 - \theta) + \theta.\sigma_Y^2. \qquad (7)$$

За математическото очакване и дисперсията на S след заместване на изразите (6) и (7) в уравнение (3) се получава

$$ES = n.\theta.\mu_Y \text{ и } DS = n.\left(\mu_Y^2.\theta.(1-\theta) + \theta.\ \sigma_Y^2\right). \quad (8)$$

3.1. Точно разпределение с използване на конволюция

Основната техника за изчисляване на точното разпределение на сумата от независими случайни величини е **конволюцията** (convolution).

В случая се разглежда конволюция на сума от дискретни неотрицателни случайни величини.

Първо се показва простият случай, при който N има изродено разпределение, приемайки стойност n с вероятност 1. По този начин S е сума от n елемента X_i, където n е фиксирано число.

Нека $n = 2$, така че $S = X_1 + X_2$. Тогава за вероятностната функцията (probability function, pf) на случайната величина S се получава

$$f_S(s) = P(X_1 + X_2 = s) = \sum_{x=1}^{s} P(X_1 = x, X_2 = s\text{-}x). \quad (9)$$

Уравнение (9) за вероятностната функцията на S, $f_S(s)$ се дава и във вида

$$f_S(s) = \sum_{x_2, s-x_2=0} f_{X_1}(s - x_2).f_{X_2}(x_2) = \sum_{x_1, s-x_1=0} f_{X_2}(s - x_1).f_{X_1}(x_1). \quad (10)$$

Когато X_1 и X_2 са неотрицателни величини, уравнението (10) може да се презапише за $S = 0, 1, ...,$ както следва

$$f_S(s) = \sum_{x_2=0}^{s} f_{X_1}(s - x_2).f_{X_2}(x_2) = \sum_{x_1=0}^{s} f_{X_2}(s - x_1).f_{X_1}(x_1). \quad (11)$$

Вероятностната функция $f_S(s)$, изчислена чрез изразите (10) или (11) е **конволюция** на вероятностните функции $f_{X_1}(.)$ и $f_{X_2}(,)$.

За вероятностната функция $f_S(s)$ е в сила зависимостта

$$f_S(s) = (f_{X_2} * f_{X_1})(s) = (f_{X_1} * f_{X_2})(s), \quad (12)$$

която показва, че конволюциите са комутативни.

Понеже вероятностните функции на X_1 и X_2 са $f_X(.)$, и X_1 и X_2 са независими, то уравнение (11) за вероятностната функция $f_S(s)$ може да се запише във вида

$$f_S(s) = \sum_{x=0}^{s} f_X(s).f_X(s - x). \quad (13)$$

Следователно, функция $f_S(s)$, изразена като 2-кратна конволюция на $f_X(.)$ е

$$f_S(s) = f_{X_1+X_2}(s) = (f_X * f_X)(s) = f_X^{*2}(.)\ . \quad (14)$$

Конволюциите могат да се оценяват рекурсивно. Когато $n = 3$, то 3-кратната конволюция се описва с

$$f_{X_1+X_2+X_3}(s) = (f_{X_1+X_2} * f_{X_3})(s) = (f_{X_1} * f_{X_2} * f_{X_3})(s) =$$

$$= (f_X * f_X * f_X)(s) = f_X^{*3}(.)\ . \quad (15)$$

Уравнението (12) е в сила за X_i, $i = 1, ..., n$, които са еднакво разпределени както X. За $n \geq 2$, вероятностната функция на S е конволюцията $(f_X * f_X\ ...\ * f_X)(.)$ с n елемента f_X и се означава с $f_X^{*n}(.)$.

Следователно, за n-кратна конволюция може да се изчисли, както следва

$$f_S(s) = f_X^{*n}(s) = \sum_{x=0}^{s} f_X^{*(n\text{-}1)}(s - x).f_X(x) =$$

$$= \sum_{x=0}^{s} f_X(s - x).f_X^{*(n\text{-}1)}(x)\ . \quad (16)$$

3.2. Апроксимация на индивидуалния модел на риска

Общата загуба (1), която е сума от n независими и еднакво разпределени случайни величини X_i има приблизително нормално разпределение по силата на Централната гранична теорема, когато n е достатъчно голямо число.

Една апроксимация на **функцията на разпределение** (density function, df) на S, $F_S(s)$ може да се изчисли с използване на математическото очакване и дисперсията на S, определени с уравнения (3), (6) и (7), както следва:

$$F_S(s) = P(S \leq s) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{DS}} \leq \frac{s - ES}{\sqrt{DS}}\right) \cong$$

$$\cong P\left(Z \leq \frac{s - ES}{\sqrt{DS}}\right) = \Phi\left(\frac{s - ES}{\sqrt{DS}}\right) . \quad (17)$$

Нормалното разпределение на общия риск S е в сила, дори когато индивидуалните рискове X_i не са еднакво разпределени.

4. Колективен модел на риска

Колективният модел на риска (2) определя общата загуба S като сума на N загуби, които са независими и еднакво разпределени случайни величини, както променлива X. По този начин, случайната променлива S следва съставно разпределение, за което N е първичното, а X вторичното разпределение.

В настоящото разглеждане първичното и вторичното разпределения се определят от неотрицателни дискретни случайни величини.

4.1. Свойства на съставното разпределение

Моментната функция (функцията, генерираща момент; moment generating function, mgf) на X, означавана с $M_X(t)$, е функция на t и се дефинира както следва:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) , \quad (18)$$

когато математическото очакване съществува. Ако функцията $M_X(t)$ съществува за t в отворен интервал около $t = 0$, то моментите на X съществуват и могат се получат чрез последователно диференциране на функция $M_X(t)$ по отношение на t и изчисляване на резултата в $t = 0$. За r-тата производна на $M_X(t)$ е в сила зависимостта:

$$M_X^r(t) = \frac{d^r M_X(t)}{dt^r} = \frac{d^r}{dt^r} E(e^{tX}) =$$

$$= E\left[\frac{d^r}{dt^r}\right](e^{tX}) = E(X^r e^{tX}) . \quad (19)$$

В точката $t = 0$, стойността на r-тата производна на $M_X(t)$ се получава

$$M_X^r(0) = E(X^r) = \mu_r', \quad (20)$$

където по дефиниция r-тият начален момент на случайната величина X в общия случай се дава с формулата

$$E(X^r) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^r . f_{X_i}(x_i) = \mu_r' . \quad (21)$$

Моментната функция на случайната величина S (моментната функция на общата загуба), представляваща сума от n независими и еднакво рапределени случайни величини ($S = X_1 + X_2 + ... + X_n$), всяка една с моментна функция $M_X(t)$, се получава по следния начин

$$M_S(t) = E(e^{tS}) = E(e^{t.(X_1+X_2+...+X_n)}) =$$

$$= E(e^{(t.X_1+t.X_2+...+t.X_n)}) =$$

$$= E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{t.X_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} E(e^{t.X_i}) = [M_X(t)]^n \ . \qquad (22)$$

Трябва да се подчертае важното свойство на моментната функция (mgf) да дефинира еднозначно разпределението на случайната величина. По-конкретно, ако две случайни величини имат едни и същи моментни функции, то техните разпределения са идентични.

Ако X е случайна величина, която приема само цели неотрицателни стойности, то за тази величина може да се дефинира т.н. **функция за генериране на вероятност** (probability generating function, pgf) на X, отбелязвана с $P_X(t)$, както следва

$$P_X(t) = E(t^X)\ , \qquad (23)$$

ако математическото очакване съществува. Моментната функция (mgf) и функцията за генериране вероятност (pgf) на случайната величина X, са свързани чрез уравненията:

$$M_X(t) = P_X(e^t) \qquad (24)$$

и

$$P_X(t) = M_X(\log t)\ . \qquad (25)$$

Ако е дадена функцията за генериране вероятност (pgf), $P_X(t)$ на случайната величина X, то може да се получи съответната вероятностна функция (pf), $f_X(r)$:

$$f_X(r) = \frac{P_X^r(0)}{r!}\ . \qquad (26)$$

Общите загуби S, описани с колективния модел (2), удовлетворяват условията и изводите на следващата теорема.

Теорема. Нека S е съставно разпределение. Ако първичното разпределение N има моментна функция $M_N(t)$ и вторичното разпределение X има моментна функция $M_X(t)$, то моментната функция за S, е

$$M_S(t) = M_N[\log M_X(t)], \qquad (27)$$

където $S = X_1 + X_2 + ... + X_N$. Променливите X_i, $i = 1, ..., N$ са независими и еднакво разпределени случайни величини, както променливата X и всяка X_i има моментна функция $M_X(t)$.

Ако случайната величина N има функция за генериране вероятност, $P_N(t)$ и X е цяла неотрицателна случайна величина с функция за генериране вероятност, $P_X(t)$, то функцията за генериране вероятност на S е

$$P_S(t) = P_N[P_X(t)] \qquad (28)$$

Математическото очакване на случайната величина за общите загуби S се изчислява по следния начин

$$ES = E[E(S|N)] = E[E(X_1 + ... + X_N|N)] =$$

$$= E[E(N.X)|N] =$$

$$= E[E(N|N)E(X|N)] =$$

$$= E[N.E(X)] =$$

$$= E(N.\mu_X) = \mu_X E(N) = \mu_N \mu_X\ , \qquad (29)$$

където $EN = \mu_N$ и $EX = \mu_X$

Дисперсията на случайната величина за общите загуби S се определя с използване следните зависимости и условието за независимост между случайните величини N и X

$$D(S) = E(S^2) - (ES)^2 \text{ и } E(S^2) =$$

$$= E[E(S^2|N)] \qquad (30)$$

$$E(X|N) = EX \text{ и } D(X|N) = DX \qquad (31)$$

$$D(S|N) = E(S^2|N) - [E(S|N)]^2$$

$$\text{и } E(S^2|N) = D(S|N) + [E(S|N)]^2 \qquad (32)$$

Дисперсията на общите загуби S се получава с отчитане на уравнения (30)-(32), както следва

$$D(S) = E(S^2) - (ES)^2 =$$

$$= E[E(S^2|N)] - (ES)^2 =$$

$$= E[D(S|N) + (E(S|N))]^2 - (ES)^2 =$$

$$= E[D(S|N) + D[E(S|N)] =$$

$$= E[D(X_1 + ... + X_N|N)] + D[E(X_1 + ... + X_N|N)] =$$

$$= E[ND(X|N)] + D[NE(X|N)] =$$

$$= E(N.\sigma_X^2) + D(N.\mu_X) =$$

$$= \sigma_X^2 E(N) + \mu_X D(N) =$$

$$= \mu_X.\sigma_X^2 + \sigma_N^2.\mu_X^2 , \qquad (33)$$

където $DN = \sigma_N^2$ и $DX = \sigma_X^2$.

Нека се разгледа съвместно разпределение, в което първичното разпределение за N има вероятностна функция $f_N(.)$. При използване на общия закон за вероятностите, за съвместно разпределение S се получава следната вероятностна функция

$$f_S(s) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_1 + ... + X_N = s|N = n).f_N(n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 + ... + X_n = s).f_N(n) , \qquad (34)$$

в която членът $P(X_1 + ... + X_n = s)$ може да се изчисли като n-кратна конволюция на $f_X(.)$. Обаче, оценката на конволюция обикновено е доста сложна при голямо n.

4.2. Апроксимация на колективния модел на риска

При индивидуалния модел на риска, ако броят на полиците n е голямо число, то по силата на Централната гранична теорема случайната променлива за общата загуба S е приблизително нормално разпределена. В случая на колективния модел на риска проблемът е по-сложен, понеже броят на сумиране елементи (исковете) N в общата загуба S е случайна величина. Въпреки това, ако средният брой на исковете е голям, то може да се предполага удовлетворяване на условията за нормално разпределение. Така, с използвате на уравненията за математическото очакване (29) и дисперсията (33) на случайната величина S, може да се апроксимира функцията на разпределение на S по аналогичен начин, както при индивидуалния модел на риска:

$$F_S(s) = P(S \le s) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{DS}} \le \frac{s - ES}{\sqrt{DS}}\right) \cong$$

$$\cong P\left(Z \le \frac{s - ES}{\sqrt{DS}}\right) = \Phi\left(\frac{s - ES}{\sqrt{DS}}\right) . \qquad (17=35)$$

5. Заключение

В статията се обсъждат особеностите на индивидуалния риск и колективни модели за анализ на риска по отношение оценката на общите загуби. Предлага се и двата модела да се използват от общинските власти за оценка на потенциалните разходи от възникване на природни бедствия и ефективно преразпределение на наличните средства.

Литература

1. Георгиева, Кр., Да си пожелаем най-доброто, да се подготвим за най-лошото, сп. „Мениджър”, декември, 2010.

2. Информация за Кризисните събития на Националния статистически институт, http://www.nsi.bg/

3. Padli J., M. S. Habibullah, A. H. Baharom, Economic Impact of Natural Disasters' Fatalities", International Journal of Social Economics, Vol. 37, Iss: 6, 2010, pp.429- 441.

4. Klugman S., H. Panjer, G. Willmot, Loss Models – From Data to Decisions, 2nd ed., Wiley-Intercience, New Jersey, 2004.

5. Kaas R., M. Goovaerts, J. Dhaene, M. Denuit, Modern Actuarial Risk Theory – Using R, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2008. ИА