

За измерителите на асиметрия и ексцес

доц. г.и.к.н. Тодор Калянов

*УНСС категория „Статистика
и иконометрия”*

тел.: 02 8195208, e-mail: todornik@abv.bg

Резюме: В статията се извършва сравнителен анализ на пет коефициента, измерващи степента на асиметрия в емпиричните статистически разпределения. Коефициентите са изчислени за разпределенията на живородените деца по възраст на майката. Данните са общо за България, съответно за всички родени деца, за първо и второ дете през периода от 1961 до 2008 година. Дискутира се относно познавателния смисъл на всеки от измерителите и причините за различията в техните стойности. Разглежда се връзката между асиметрията и ексцеса и се обосновава необходимостта от тяхното съвместно използване при наличие на емпирични разпределения, които не се подчиняват на Гаус-Лапласовия закон. За разлика от наложилата се практика внимание да се отделя преди всичко на ексцеса при симетрични разпределения, тук се поставя обратната задача – да се анализира наличието на асиметрия при наличие на различна степен на ексцес.

Ключови думи: статистическо разпределение, коефициент на асиметрия, коефициент на ексцес.

JEL: C10, C16, C46.

Традиционно при представяне на обобщаващите числови характеристики на разпределенията в литературата се посочва, че асиметрията характеризира страничната изтегленост на разпределението. Отбелязва се, че страничната изтегленост може да бъде лява или дясна, съответно асиметрията е отрицателна или положителна [Венецкий, Венецкая (1979; 16), Mansfield (1987; 44)]. За разлика от ексцеса, за който познавателен смисъл има дискусия, то въпросът за смисъла на асиметрията се поставя сравнително по-рядко [Groeneveld, R. A. и G. Meeden, (1984; 391)]. Много често при практическите изследвания се приема, че измерителят, конструиран на основата на моментите, е за предпочитане и се спира до тук.

Всяка от характеристиките на статистическото разпределение има определен познавателен смисъл. Тя отразява по свой начин влиянията, в резултат на които са се оформили съответните значения на признака, притежавани от единиците, чрез които се проявява изследваното явление. В зависимост от задачата, която се решава и вида на емпиричното разпределение, се използват и различните характеристики. Вниманието в настоящата статия е насочено към асиметрията и някои от нейните измерители.

При анализа на емпирични асиметрични разпределения като правило се поставят два въпроса:

- първият, какъв е вида на асиметрията – положителна или отрицателна;
- вторият, каква е степента на асиметрия – сравнително голяма или сравнително малка, т.е. да се измери степента на отклонение от симетричното разпределение;

Заг тези въпроси се крие и третият въпрос – в резултат на какви влияния се е получило асиметрично разпределение? В повечето случаи този въпрос не се задава. Нещо повече, на асиметрията, а като правило и на ексцеса, обикновено не се отделя внимание в статистическата практика. Но какво се случва, когато се задават тези въпроси при изследване на емпиричните разпределения¹?

Отговорът на първия въпрос изглежда твърде прост. Построява се честотният полигон на емпиричното разпределение и ако е изтеглено лявото рамо, разпределението е с лява, отрицателна асиметрия. Обратно, ако разпределението има стръмно ляво рамо и изтеглено, полегато дясно рамо, налице е дясна, положителна асиметрия.

На втория въпрос се дава отговор със съответния числов измерител. Но кой да бъде той, при условие че има различни възможни измерители като коефициентите на Пирсън, Боули, Кели, коефициент, основаващ се на третия момент². Всеки един от тях има различна конструкция, някои имат гранични стойности, а други нямат такива. Кой от тях е подходящ, на кой може да се има доверие?

В зависимост от тяхната конструкция измерителите могат да се разделят на два вида:

- измерители от „чист“ тип с три разновидности. Първата разновидност е измерителят, който се основава само на средни на положение – първи, втори и трети квартил. Както е известно коефициентът на асиметрия, известен като коефициент на Боули, отчита в явен вид само честотите. При определяне на неговата стойност не участват пряко значенията на признака.

$$A_B = \frac{Q_1 + Q_3 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$$

където Q_1 и Q_3 са съответно първи и трети квартил, M_e е медианата.

Вторият „чист“ измерител е моментният коефициент на асиметрия. В неговата конструкция участват първи начален, втори и трети централни моменти. Стойността му се формира при участието едновременно на значенията на съответния признак и честотите.

$$A_M = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^3 f_i}{\sum_{i=1}^k f_i \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2 f_i}{\sum_{i=1}^k f_i}} \right)^3$$

Третият измерител, предложен от Въжаров³, се основава на три стойности, изчислени по формулата на средната аритметична величина, и има следния вид:

$$K_a = \frac{\mu_1 + \mu_2 - 2\mu}{\mu_2 - \mu_1}$$

където:

μ е средната аритметична за всички единици на изследваната съвкупност;

¹ Имат се предвид едномодални статистически разпределения.

² Известно е, че с помощта на нечетните моменти от по-висок порядък от трети, също се характеризира асиметрията.

³ Този измерител не е публикуван до момента.

μ_1 е средната аритметична за единиците, които имат стойности по-ниски от средната на цялата съвкупност μ ;

μ_2 е средната аритметична за единиците, които имат стойности по-високи от средната на цялата съвкупност μ .

Този коефициент приема стойности от минус 1 до плюс 1.

Към този тип се отнасят и коефициентите на Кели, които използват децилите и перцентилите.

- измерители от „смесен“ тип. Такива са измерителите на Пирсън. В тяхната конструкция участват освен първи начален и втори централен момент, така също средна на гъстота (мода) и средна на положение (медиана).

$$A_{p1} = \frac{\mu - M_0}{\sigma} \text{ и } A_{p2} = \frac{3(\mu - M_e)}{\sigma},$$

където символите са известни.

Като илюстрация на затрудненията, пред които е изправен изследователят при избор на измерител на асиметрията, ще бъдат разгледани три примера. Те са от областта на демографската статистика и се отнасят за разпределенията на живородените деца по възраст на майката. Данните са общо за България, съответно за всички родени деца, за първо и второ дете през периода от 1961 до 2008 година. За всяко разпределение са изчислени средната аритметична величина, модата, медианата, първи и трети квантил, средно квадратичното отклонение, коефициентите на асиметрия на Пирсън в две разновидности – на Боули и моментният, и коефициентът, конструиран от Хр. Въжаров.

Данните в таблица 1 и построената на тяхна основа диаграма на фигура 1 по-

твърждават очакванията за различни стойности на коефициентите. Това е напълно логично, тъй като и петте измерителя са конструирани на различна основа. Различните свойства на елементите, които участват в конструкцията на отделните измерители, както и различната им чувствителност към промените в честотите, се отразяват в стойностите на коефициентите.

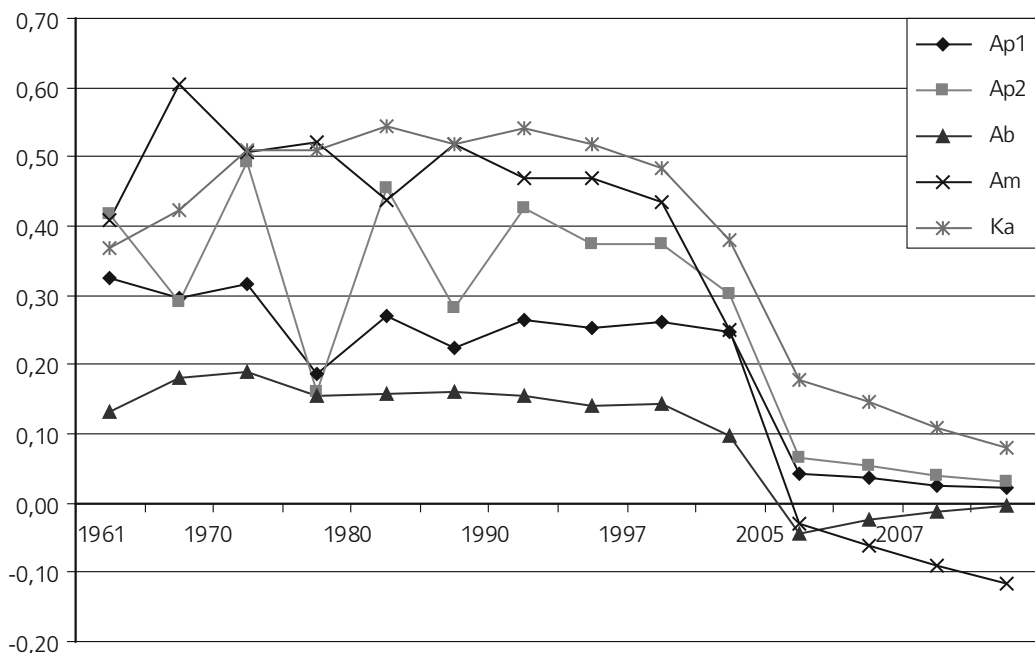
Както се вижда на фигура 1 и петте измерителя показват една и съща тенденция в изменението на степента на асиметрия на изследваните разпределения. Тази тенденция е на намаление. В същото време има и различия. С най-ниски стойности до 2005 г. е коефициентът на Боули, чиито стойности се вместили в интервала от минус 1 до плюс 1. В случая интересът е насочен към начина на изменение на коефициентите на асиметрия.

С относително най-малки колебания в размера е коефициентът на Боули и причината за това са неговите граници. С най-резки и големи по размер колебания до 1990 г. е коефициентът на Пирсън, който се основава на разликата между средната аритметична и модата.

Коефициентът K_a , използващ различията между стойностите на средната аритметична, е с най-голям размер през всички години. От своя страна моментният коефициент е измерителят, който единствен показва увеличаване на отрицателната асиметрия след 2005 г., докато коефициентът на Боули се изменя в противоположна посока. Според него разпределението става почти симетрично. Промените в стойностите на измерителите на Пирсън по-скоро се доближават до тези на моментния коефициент, но според тях все още няма отрицателна асиметрия.

Таблица 1. Разпределения и параметри на разпределенията на всички живородени деца в Република България през периода 1961-2008 г.

| Възраст | Години | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--|--|
| | 1961 | 1965 | 1970 | 1975 | 1980 | 1985 | 1990 | 1995 | 1997 | 2000 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | | |
| 10-14 | 126 | 167 | 213 | 238 | 262 | 407 | 502 | 466 | 397 | 417 | 399 | 383 | 407 | 456 | | |
| 15-19 | 21577 | 23266 | 23599 | 23649 | 24301 | 22804 | 22015 | 15812 | 12674 | 12370 | 9679 | 9861 | 9673 | 9675 | | |
| 20-24 | 52506 | 50653 | 64198 | 65281 | 59437 | 52976 | 46872 | 29872 | 26242 | 27237 | 20628 | 20716 | 20147 | 20312 | | |
| 25-29 | 38696 | 29996 | 31956 | 38761 | 30029 | 28282 | 23179 | 17007 | 16343 | 21577 | 22871 | 23428 | 23427 | 23479 | | |
| 30-34 | 16885 | 14663 | 12854 | 12063 | 10727 | 10752 | 8954 | 6163 | 5904 | 8851 | 13113 | 14627 | 15970 | 17436 | | |
| 35-39 | 6412 | 5437 | 4765 | 3646 | 2733 | 3180 | 3027 | 2171 | 2062 | 2604 | 3796 | 4355 | 4977 | 5516 | | |
| 40-44 | 1376 | 1429 | 1029 | 914 | 595 | 521 | 603 | 452 | 479 | 543 | 550 | 571 | 699 | 792 | | |
| 45-49 | 199 | 180 | 131 | 116 | 106 | 24 | 20 | 22 | 24 | 27 | 18 | 25 | 31 | 35 | | |
| Общо | 137777 | 125791 | 138745 | 144668 | 128190 | 118946 | 105172 | 71965 | 64125 | 73626 | 71054 | 73966 | 75331 | 77701 | | |
| μ | 25,27 | 24,40 | 24,36 | 23,97 | 24,09 | 23,91 | 23,96 | 23,96 | 24,29 | 24,96 | 26,18 | 26,39 | 26,67 | 26,85 | | |
| M_0 | 23,46 | 22,85 | 22,79 | 23,05 | 22,72 | 22,75 | 22,56 | 22,61 | 22,89 | 23,62 | 25,93 | 26,18 | 26,53 | 26,72 | | |
| M_c | 24,49 | 23,90 | 23,55 | 23,71 | 23,33 | 23,42 | 23,21 | 23,30 | 23,62 | 24,41 | 26,05 | 26,29 | 26,59 | 26,79 | | |
| Q_1 | 21,21 | 20,79 | 20,85 | 20,94 | 20,63 | 20,62 | 20,40 | 20,29 | 20,56 | 21,03 | 21,86 | 21,99 | 22,17 | 22,29 | | |
| Q_3 | 28,76 | 28,38 | 27,51 | 27,49 | 27,02 | 27,30 | 27,05 | 27,30 | 27,69 | 28,52 | 29,89 | 30,37 | 30,89 | 31,25 | | |
| σ | 5,59 | 5,23 | 4,98 | 4,94 | 5,07 | 5,18 | 5,31 | 5,31 | 5,35 | 5,43 | 5,70 | 5,76 | 5,87 | 5,94 | | |
| μ_1 | 21,03 | 20,91 | 21,14 | 21,15 | 21,02 | 20,95 | 20,84 | 20,69 | 20,79 | 20,85 | 20,79 | 20,78 | 20,77 | 20,76 | | |
| μ_2 | 34,46 | 34,53 | 34,42 | 34,24 | 34,00 | 33,98 | 34,20 | 34,28 | 34,33 | 34,07 | 33,92 | 33,92 | 33,99 | 34,01 | | |
| A_{p1} | 0,32 | 0,30 | 0,32 | 0,19 | 0,27 | 0,22 | 0,26 | 0,25 | 0,26 | 0,25 | 0,04 | 0,04 | 0,02 | 0,02 | | |
| A_{p2} | 0,42 | 0,29 | 0,49 | 0,16 | 0,45 | 0,28 | 0,43 | 0,37 | 0,37 | 0,30 | 0,07 | 0,05 | 0,04 | 0,03 | | |
| A_B | 0,13 | 0,18 | 0,19 | 0,15 | 0,16 | 0,16 | 0,16 | 0,14 | 0,14 | 0,10 | -0,04 | -0,02 | -0,01 | 0,00 | | |
| A_M | 0,41 | 0,60 | 0,51 | 0,52 | 0,44 | 0,52 | 0,47 | 0,47 | 0,43 | 0,25 | -0,03 | -0,06 | -0,09 | -0,12 | | |
| K_A | 0,37 | 0,42 | 0,51 | 0,51 | 0,55 | 0,52 | 0,54 | 0,52 | 0,48 | 0,38 | 0,18 | 0,15 | 0,11 | 0,08 | | |



Фигура 1. Стойности на коефициентите на асиметрия на разпределенията за всички деца в Република България през периода 1961-2008 г.

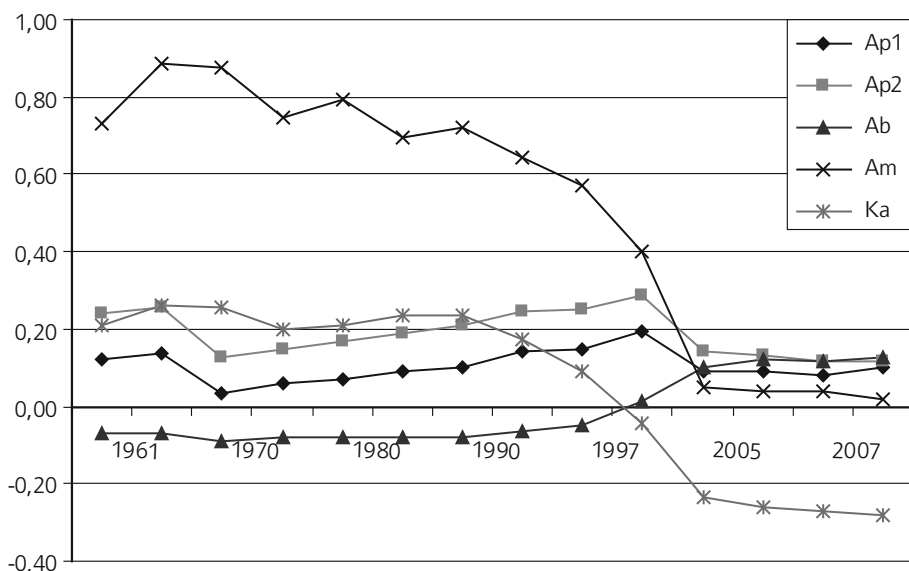
Както се установява от таблица 2 и фигура 2 – според коефициента на Боули, разпределенията до 1997 г. са с отрицателна асиметрия с почти един и същ размер. Съгласно измерителят K_A през 2000 г. разпределенията вече са с отрицателна асиметрия. В същото време другите три измерителя свидетелстват, че нито едно от анализираниите разпределения няма отрицателна асиметрия. Моментният коефициент показва, че след 1965 г. асиметрията непрекъснато намалява и разпределенията стават почти симетрични. Двата коефициента на Пирсън се изменят паралелно и между тях няма „разногласия“. Важен момент в случая е, че след 2005 г. стойностите и на четирите измерителя се доближават, но при запазване на различията в направлението на изменение на асиметричността – таблица 2. Като цяло промените в асиметрията на разпределени-

ята са сравнително плавни и в тесни граници. По-големи са измененията в стойностите на моментния коефициент и на K_A .

Доста по-различна е картината на фигура 3. В изменението на стойностите на всички коефициенти се установява редуване на увеличаване на асиметрията, спад, отново повишение, запазване на достигнатото равнище, понижние и преминаване в отрицателна асиметрия. След 2000 г. коефициента на Боули свидетелства за запазване на достигнатото равнище на отрицателна асиметрия, докато според останалите измерители негативната асиметрия нараства. Стойностите и на петте измерителя имат еднопосочни изменения във времето. За пръв път стойностите на моментния коефициент до 2000 г. се намират между тези на другите коефициенти – в случая на

Таблица 2. Разпределения и параметри на разпределенията за първо живородено дете в Република България през периода 1961-2008 г.

| Възраст | Години | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--|--|
| | 1961 | 1965 | 1970 | 1975 | 1980 | 1985 | 1990 | 1995 | 1997 | 2000 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | | |
| 10-14 | 122 | 163 | 211 | 232 | 255 | 394 | 490 | 452 | 386 | 410 | 386 | 374 | 399 | 446 | | |
| 15-19 | 18797 | 20273 | 19705 | 19111 | 19700 | 18163 | 17288 | 12404 | 10295 | 9993 | 7624 | 7594 | 7399 | 7462 | | |
| 20-24 | 28657 | 27631 | 34968 | 33250 | 31280 | 26880 | 25573 | 18100 | 17199 | 17947 | 13712 | 13835 | 13179 | 13482 | | |
| 25-29 | 7916 | 6764 | 6329 | 8108 | 7506 | 6728 | 6561 | 6110 | 7045 | 10462 | 12881 | 13437 | 13049 | 13297 | | |
| 30-34 | 2214 | 2039 | 1663 | 1652 | 1914 | 1833 | 1878 | 1598 | 1667 | 2947 | 5361 | 6302 | 6630 | 7044 | | |
| 35-39 | 747 | 783 | 590 | 553 | 437 | 537 | 585 | 560 | 568 | 866 | 1314 | 1594 | 1661 | 1792 | | |
| 40-44 | 96 | 144 | 152 | 123 | 97 | 96 | 133 | 107 | 137 | 186 | 159 | 212 | 269 | 270 | | |
| 45-49 | 5 | 10 | 17 | 30 | 62 | 6 | 2 | 6 | 9 | 16 | 6 | 7 | 15 | 12 | | |
| Общо | 58554 | 57807 | 63635 | 63059 | 61251 | 54637 | 52510 | 39337 | 37306 | 42827 | 41443 | 43355 | 42601 | 43805 | | |
| μ | 22,15 | 21,91 | 21,87 | 22,04 | 21,94 | 21,90 | 21,96 | 22,26 | 22,72 | 23,55 | 24,89 | 25,19 | 25,35 | 25,42 | | |
| M_0 | 21,61 | 21,30 | 21,74 | 21,80 | 21,64 | 21,51 | 21,52 | 21,61 | 22,02 | 22,58 | 24,40 | 24,70 | 24,89 | 24,85 | | |
| M_c | 21,81 | 21,53 | 21,70 | 21,83 | 21,71 | 21,63 | 21,66 | 21,88 | 22,32 | 23,07 | 24,64 | 24,95 | 25,12 | 25,19 | | |
| M_0 | 0,24 | 0,26 | 0,13 | 0,15 | 0,17 | 0,19 | 0,21 | 0,25 | 0,25 | 0,28 | 0,14 | 0,13 | 0,12 | 0,12 | | |
| M_c | -0,07 | -0,07 | -0,09 | -0,08 | -0,08 | -0,08 | -0,08 | -0,07 | -0,05 | 0,01 | 0,10 | 0,12 | 0,12 | 0,13 | | |
| Q_1 | 0,73 | 0,89 | 0,88 | 0,74 | 0,79 | 0,69 | 0,72 | 0,64 | 0,57 | 0,40 | 0,05 | 0,04 | 0,04 | 0,02 | | |
| Q_3 | 1,34 | 1,84 | 2,82 | 2,29 | 2,43 | 1,56 | 1,61 | 1,20 | 1,10 | 0,50 | -0,28 | -0,33 | -0,32 | -0,36 | | |
| σ | 4,37 | 4,42 | 4,03 | 4,11 | 4,18 | 4,28 | 4,40 | 4,64 | 4,73 | 5,05 | 5,43 | 5,55 | 5,67 | 5,70 | | |
| μ_1 | 17,47 | 17,46 | 17,45 | 17,44 | 17,44 | 17,39 | 17,36 | 17,32 | 17,32 | 17,30 | 17,26 | 17,27 | 17,24 | 17,22 | | |
| μ_2 | 29,31 | 29,54 | 29,33 | 28,92 | 28,87 | 29,22 | 29,38 | 29,29 | 29,18 | 29,28 | 29,64 | 29,84 | 29,97 | 30,04 | | |
| A_{p1} | 0,12 | 0,14 | 0,03 | 0,06 | 0,07 | 0,09 | 0,10 | 0,14 | 0,15 | 0,19 | 0,09 | 0,09 | 0,08 | 0,10 | | |
| A_{p2} | 0,24 | 0,26 | 0,13 | 0,15 | 0,17 | 0,19 | 0,21 | 0,25 | 0,25 | 0,28 | 0,14 | 0,13 | 0,12 | 0,12 | | |
| A_B | -0,07 | -0,07 | -0,09 | -0,08 | -0,08 | -0,08 | -0,08 | -0,07 | -0,05 | 0,01 | 0,10 | 0,12 | 0,12 | 0,13 | | |
| A_M | 0,73 | 0,89 | 0,88 | 0,74 | 0,79 | 0,69 | 0,72 | 0,64 | 0,57 | 0,40 | 0,05 | 0,04 | 0,04 | 0,02 | | |
| K_A | 0,21 | 0,26 | 0,26 | 0,20 | 0,21 | 0,24 | 0,23 | 0,17 | 0,09 | -0,04 | -0,23 | -0,26 | -0,27 | -0,28 | | |



Фигура 2. Стойности на коефициентите на асиметрия на разпределенията за първо дете в Република България през периода 1961-2008 г.

коефициентите на Пирсън и Боули. За кратко подобен факт се констатира при разпределението на всички родени деца за две години – 2000 и 2005-та.

Очевиден е проблемът, който възниква при избор на измерител на асиметрията. Всеки от разгледаните коефициенти измерва по свой начин отклонението от симетричното разпределение. Това означава, че и при тълкуването на получените стойности трябва да се държи сметка за техния познавателен смисъл.

Първият коефициент на Пирсън се основава на разликата между средната аритметична и модата. Следователно той измерва различието между една величина, която е функция на два елемента – стойностите на признака при отделните единици и честотите, и втора, която е функция от разпределението на честотите в три съседни значения или три съседни интервала.

Подобна е идеята и при втория измерител на Пирсън.

При коефициента на Боули се взема предвид разпределението на честотите в шест интервала, въз основа на които се изчисляват квантилите.

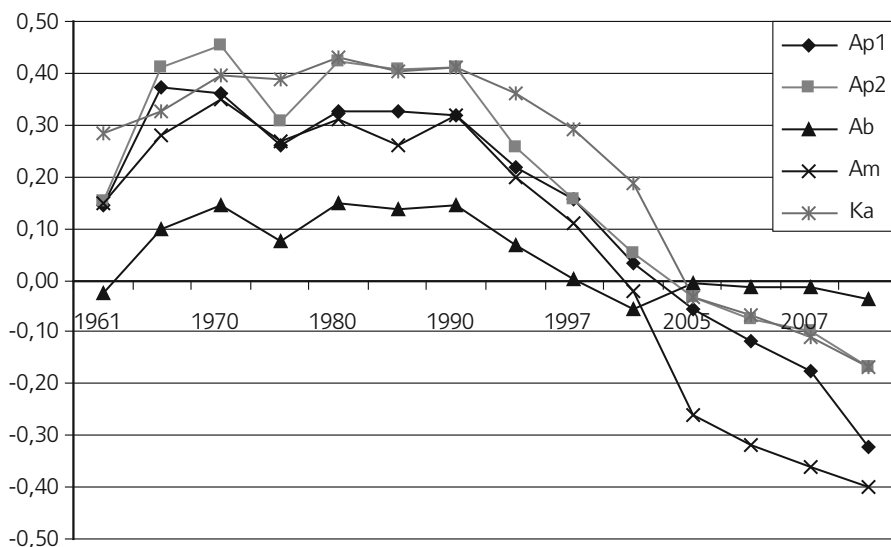
Като се има предвид, че:

- първо, средната аритметична представлява определен център на статистическото разпределение, който при асиметрични разпределения не съвпада с максималната концентрация на единиците, но зависи от степента на концентрация или обратно – от степента на деконцентрация или разсредоточаване, и
- второ, модата е значението с най-голяма концентрация на единиците,

то първият коефициент на Пирсън измерва асиметрия, свързана главно с концентра-

Таблица 3. Разпределения и параметри на разпределенията за второ живородено дете в Република България през периода 1961-2008 г.

| Възраст | Години | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--|--|--|
| | 1961 | 1965 | 1970 | 1975 | 1980 | 1985 | 1990 | 1995 | 1997 | 2000 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | | | |
| 10-14 | 4 | 4 | 2 | 6 | 7 | 13 | 12 | 14 | 10 | 7 | 13 | 8 | 8 | 10 | | | |
| 15-19 | 2517 | 2736 | 3408 | 4031 | 4015 | 4025 | 4053 | 2974 | 2086 | 2089 | 1743 | 1960 | 1891 | 1837 | | | |
| 20-24 | 19187 | 18403 | 23102 | 26099 | 22633 | 20995 | 17186 | 9369 | 7049 | 7012 | 4992 | 4864 | 4912 | 4784 | | | |
| 25-29 | 20508 | 15248 | 16883 | 22482 | 15796 | 15371 | 12156 | 8163 | 7006 | 8310 | 7537 | 7498 | 7706 | 7632 | | | |
| 30-34 | 6617 | 5916 | 5705 | 6075 | 5035 | 5194 | 4261 | 2833 | 2724 | 3946 | 5765 | 6354 | 7137 | 8115 | | | |
| 35-39 | 1413 | 1327 | 1397 | 1301 | 935 | 1153 | 1132 | 742 | 645 | 814 | 1465 | 1737 | 2118 | 2528 | | | |
| 40-44 | 119 | 197 | 162 | 210 | 127 | 125 | 145 | 112 | 89 | 125 | 151 | 154 | 183 | 258 | | | |
| 45-49 | 12 | 8 | 3 | 10 | 16 | 1 | 5 | 5 | 5 | 3 | 8 | 3 | 4 | 12 | | | |
| Общо | 50377 | 43839 | 50662 | 60214 | 48564 | 46877 | 38950 | 24212 | 19614 | 22306 | 21674 | 22578 | 23959 | 25176 | | | |
| μ | 26,07 | 25,82 | 25,43 | 25,44 | 25,10 | 25,24 | 25,14 | 25,29 | 25,73 | 26,32 | 27,65 | 27,83 | 28,17 | 28,59 | | | |
| M_0 | 25,43 | 24,16 | 23,80 | 24,30 | 23,66 | 23,76 | 23,62 | 24,21 | 24,96 | 26,15 | 27,95 | 28,49 | 29,15 | 30,40 | | | |
| M_c | 25,85 | 25,21 | 24,74 | 24,99 | 24,48 | 24,62 | 24,48 | 24,87 | 25,47 | 26,23 | 27,71 | 27,97 | 28,35 | 28,90 | | | |
| Q_1 | 22,63 | 22,23 | 22,00 | 22,11 | 21,79 | 21,83 | 21,65 | 21,64 | 21,99 | 22,48 | 23,67 | 23,78 | 24,16 | 24,65 | | | |
| Q_3 | 28,92 | 28,85 | 28,40 | 28,34 | 28,09 | 28,29 | 28,27 | 28,55 | 28,97 | 29,59 | 31,71 | 32,05 | 32,42 | 32,85 | | | |
| σ | 4,41 | 4,46 | 4,52 | 4,37 | 4,43 | 4,56 | 4,77 | 4,96 | 4,97 | 5,05 | 5,41 | 5,53 | 5,56 | 5,64 | | | |
| μ_1 | 21,92 | 21,85 | 21,86 | 21,83 | 21,74 | 21,69 | 21,54 | 21,29 | 21,35 | 21,35 | 21,19 | 21,05 | 21,10 | 21,10 | | | |
| μ_2 | 33,53 | 33,67 | 33,69 | 33,65 | 33,51 | 33,59 | 33,80 | 33,83 | 33,71 | 33,60 | 33,71 | 33,75 | 33,82 | 33,91 | | | |
| A_{p1} | 0,14 | 0,37 | 0,36 | 0,26 | 0,33 | 0,33 | 0,32 | 0,22 | 0,16 | 0,03 | -0,06 | -0,12 | -0,18 | -0,32 | | | |
| A_{p2} | 0,15 | 0,41 | 0,46 | 0,31 | 0,42 | 0,41 | 0,41 | 0,26 | 0,16 | 0,05 | -0,03 | -0,08 | -0,10 | -0,17 | | | |
| A_B | -0,02 | 0,10 | 0,14 | 0,07 | 0,15 | 0,14 | 0,14 | 0,07 | 0,00 | -0,06 | -0,01 | -0,01 | -0,02 | -0,04 | | | |
| A_M | 0,73 | 0,89 | 0,88 | 0,74 | 0,79 | 0,69 | 0,72 | 0,64 | 0,57 | 0,40 | 0,05 | 0,04 | 0,04 | 0,02 | | | |
| K_A | 0,28 | 0,33 | 0,40 | 0,39 | 0,43 | 0,40 | 0,41 | 0,36 | 0,29 | 0,19 | -0,03 | -0,07 | -0,11 | -0,17 | | | |



Фигура 3. Стойности на коефициентите на асиметрия на разпределенията на второ дете в Република България през периода 1961-2008 г.

цията на единиците, които се съдържат между точката с най-голяма концентрация и центъра на разпределението, определен чрез средната аритметична величина.

Вторият коефициент на Пирсън измерва предимно степента на асиметрия, която е свързана с концентрация на единиците между медианата и средната аритметична величина. Като се има предвид, че в общия случай тези две средни са с по-близки стойности, може да се приеме, че той измерва степента на концентрация в един по-тесен интервал.

По аналогичен начин може да се разгледа и коефициентът на Боули. За него е характерно, че той измерва асиметрия, която е свързана с концентрация на единиците в шест интервала, но твърде често интервалите са само три на брой. Своеобразна разновидност на

коефициента представлява и K_A . При него обаче се отчитат в явен вид значенията на признака и съответните честоти както за разпределението като цяло, така и в двете му части, разделени от средната аритметична величина.

Моментният коефициент измерва степента на асиметрия, която е свързана не само с концентрация на единиците в един или два интервала, но отчита в явен вид и наличието на единици във всички интервали. Казано по друг начин, той държи сметка и за разредоточаването, деконцентрацията на единиците по значенията на признака, за които е формирано даденото разпределение. По този начин не само повдигането на разликите на трета степен е причина за по-високите стойности на моментния коефициент, но принос за това има и степента на деконцентрация⁴.

⁴ В случаите, когато данните не са представени в интервален статистически рег, се променя само начинът на изчисляване на медианата и модата, без да се променя същността на измерителите на асиметрия и ексцес.

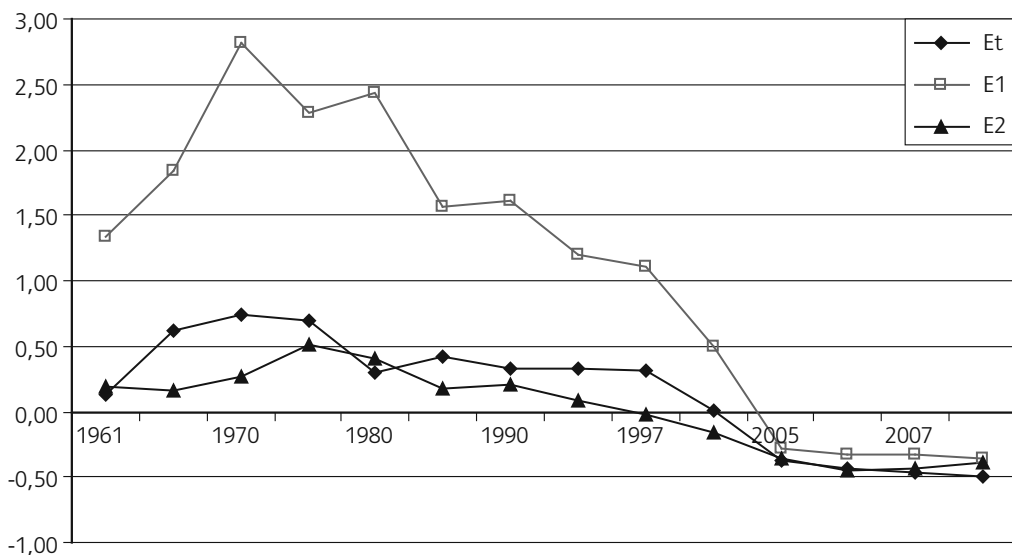
Основания за подобен начин на тълкуване на измерителите могат да се намерят в трите примера и в следващите таблица 4 и фигура 4, в които са представени стойностите на моментния коефициент на ексцес.

Според данните в таблица 4 и фигура 4 до 2005 г. концентрацията на единиците по отношение на средната аритметична величина е най-голяма в разпределенията за първо дете. Както се вижда на фигура 2, за този ранг стойностите на моментния коефициент се различават най-много от тези на останалите три измерителя при най-висок ексцес, т.е. при най-голяма концентрация на

единиците. С намаляване степенята на концентрация до определена степен намаляват и различията между коефициентите. Това се установява за разпределенията за всички родени и за първо дете – фигура 1 и 2. По-различно е положението при разпределенията за второ дете. За тях е характерно, че съгласно коефициента на ексцес, степенята на концентрация е по-малка от тази при първо дете и всички деца. Освен това, стойностите на моментния коефициент на асиметрия до 2000 г. са между тези на коефициентите на Пирсън и Боули. След 2000 г., когато в разпределението за второ дете нараства степенята на свърхразсредоточаване, нараства

Таблица 4. Моментен коефициент на ексцес за всички родени деца, за първо и второ дете в Република България през периода 1961-2008 година

| Година | 1961 | 1965 | 1970 | 1975 | 1980 | 1985 | 1990 | 1995 | 1997 | 2000 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Е-Всичко | 0,12 | 0,62 | 0,74 | 0,69 | 0,30 | 0,43 | 0,33 | 0,33 | 0,32 | 0,01 | -0,38 | -0,44 | -0,47 | -0,50 |
| Е-първо | 1,34 | 1,84 | 2,82 | 2,29 | 2,43 | 1,56 | 1,61 | 1,20 | 1,10 | 0,50 | -0,28 | -0,33 | -0,32 | -0,36 |
| Е-второ | 0,19 | 0,16 | 0,26 | 0,51 | 0,41 | 0,17 | 0,21 | 0,09 | -0,02 | -0,16 | -0,36 | -0,45 | -0,44 | -0,39 |



Фигура 4. Моментен коефициент на ексцес за всички родени деца, за първо и второ дете в Република България през периода 1961-2008 година

и различието между моментния коефициент на асиметрия и другите коефициенти. Важното в случая е, че всички показатели посочват засилване на отрицателната асиметрия.

В литературата се дискутира основно въпросът за смисъла на коефициента на ексцес и то предимно при симетрични разпределения, като се започне от К. Пирсън, Стюдент и до днес. В разгледаните тук примери се анализира обратната ситуация. Какъв е смисълът на асиметрията при разпределения с различен ексцес? Вижда се, че и двете характеристики на формата на разпределението са свързани със степента на концентрация на единиците на даденото разпределение. Но асиметрията е свързана и с местоположението на концентрацията и в зависимост от вида на измерителя, т.е. от неговата конструкция, се измерва и различна степен на концентрация.

Измерителите на асиметрия и ексцес, конструирани на основата на моментите, имат качеството да отчитат степента на концентрация по отношение на един център – средната аритметична величина. Различното между тези два измерителя е, че коефициентът на асиметрия показва и наличието на отклонения, типични за определена част от единиците. По този начин се отдава дължимото на специфични въздействия, които са обусловили различно поведение на част от единиците.

Дискусията по определяне на най-подходящите измерители на асиметрия и ексцес продължава и в момента. Всеки от съществуващите измерители има своите предимства и недостатъци. Изборът на конкретния измерител зависи от вида на данните

и конкретните задачи, които трябва да се решават. Все още липсва ясна и приемлива систематизация на различните измерители, която да бъде в помощ на изследователите в тяхната практическа дейност.

Пренебрегването на съществуването на асиметрия и ексцес в емпиричните разпределения нерядко води до вземането на неверни решения. В други случаи използването и съобразяването с наличието на асиметрия и ексцес позволява да се намери решение на проблеми, които дълго време са се приемали за почти нерешими⁵.

Литература

1. Abramowitz, Milton; Stegun, Irene A., eds. (1972). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, New York: Dover Publications, ISBN 978-0-486-61272-0.
2. Bowley, A. L. (1920). Elements of Statistics, New York: Charles Scribner's Sons.
3. Венецкий, И. Г., В. И. Венецкая (1979). Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе, Москва.
4. Chissom, Brad S. (1970). "Interpretation of the Kurtosis Statistics", The American Statistician, Vol. 34, No. 4, 19-22.
5. Cramer, H. (1945). "Mathematical Methods of Statistics", 1, N.J.: Princeton University Press.
6. Darlington, R. B. (1970). "Is Kurtosis Really Peakedness?" The American Statistician, 24, 19-22.

⁵ По този въпрос вж. Калоянов, Т., Изследване на динамиката на плодовитостта на жените в България посредством сравнения на разпределения 1961-2008, УИ „Стопанство“, УНСС, С., 2011, с. 30-45.

7. Dodge, Y. and Rousson, V. (1999). "The Complications of the Fourth Central Moment", *The American Statistician*, 53, 267-269.
8. Dyson, F. J. (1943). "A Note on Kurtosis", *Journal of the Royal Statistical Society*, 106, 4,360-361.
9. Finucan, H. M. (1964). "A Note on Kurtosis", *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, 26, 1,111-112.
10. Groeneveld, R. A. and G. Meeden, (1984). "Measuring Skewness and Kurtosis", *The Statistician*, 33, 391-399.
11. Hildebrand, David K. (1971). "Kurtosis Measures Bimodality?", *The American Statistician*, 25, No. 1, 42-43.
12. Kendall, M. G. and A. Stuart (1969). *The Advanced Theory of Statistics (Vol. 1)*. London: Charles W. Griffin.
13. Kotz, Samuel and Edith Seier, (2007). "An analysis of quantile measures of kurtosis: center and tails", *Journal Statistical Papers*, Springer Berlin/ Heidelberg.
14. MacGillivray, H. L. (1986). "Skewness and Asymmetry: Measures and Orderings", *The Annals of Statistics*, 14, 994-1011.
15. MacGillivray, H. L., K. P. Balanda, (1988). "The relationships between skewness and kurtosis", *Austral. J. Statist.* 30 (3). 319-337.
16. Mansfield, E. (1987). *Statistics for Business and Economics. Methods and Applications*. Third ed. W.W. Norton & Company, Inc. New York.
17. Pearson, K. (1895). Contributions to the mathematical theory of evolution, II: Skew variation in homogeneous material. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 186, 343-414.
18. Pearson, K. (1905). "Skew variation, a rejoinder". *Biometrika*, 4, pp. 169-212.
19. Student, (July 1927). "Errors of Routine Analysis" *Biometrika*, 19: pp. 151-164. ~~VIA~~