

Разделно комутиране с един общ оператор от интегрален тип в многомерния случай

Миряна Христова*

Резюме: Някои резултати от предишни публикации на автора се обобщават в случая на много комплексни променливи. Разделното комутиране с един общ линеен оператор се разглежда в случаите, когато компонентите на оператора запазват степените, покачват степените и в смесения случай, когато при някои компоненти степените се запазват, а при други се покачват.

Ключови думи: комутант на линеен оператор.

JEL: C65, C69.

Въведение

Нека A_0 е пространството на функциите $y(z)$ на многомерна комплексна променлива $z = (z_1, z_2, \dots, z_s) \in C^s$, които са аналитични в околности на координатното начало. Ще използваме стандартния кратък начин за означаване на мултииндексите с една буква $k = (k_1, k_2, \dots, k_s)$ и $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_s$, а също и обозначаването на мултистепенни $z^k = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_s^{k_s}$ и на многомерен факториел $k! = k_1! k_2! \dots k_s!$.

За фиксирано l , $1 \leq l \leq s$, нека $\{b_{l,k_l}\}_{k_l=0}^\infty$ е произволна редица от комплексни числа и нека разгледаме линейния оператор M_l , който действа само върху l -тата променлива z_l на произволна мултистепен по следния начин:

$$M_l z^k = M_l(z_1^{k_1} \dots z_l^{k_l} \dots z_s^{k_s}) = z_1^{k_1} \dots (b_{l,k_l} z_l^{k_l+p_l}) \dots z_s^{k_s}, \quad b_{l,k_l} \neq 0, k_l = 0, 1, 2, \dots, p_l \geq 0, \quad (1)$$

т.е. той променя само степените на z_l с $p_l \geq 0$ и ги умножава с произволно зададени коефициенти $b_{l,k_l} \neq 0$. Ако представянето на една функция $y \in A_0$ чрез степенен ред е

$$y(z) = \sum_{|k|=0}^\infty a_k z^k, \text{ т.е. } y(z_1, \dots, z_l, \dots, z_s) = \sum_{k_1=0}^\infty \dots \sum_{k_l=0}^\infty \dots \sum_{k_s=0}^\infty a_{k_1, \dots, k_l, \dots, k_s} z_1^{k_1} \dots z_l^{k_l} \dots z_s^{k_s}$$

тогава можем да запишем

$$M_l y(z_1, \dots, z_l, \dots, z_s) = \sum_{k_1=0}^\infty \dots \sum_{k_l=0}^\infty \dots \sum_{k_s=0}^\infty a_{k_1, \dots, k_l, \dots, k_s} z_1^{k_1} \dots (b_{l,k_l} z_l^{k_l+p_l}) \dots z_s^{k_s} \quad (2)$$

* Миряна Христова е доктор, доцент в катедра "Математика" на УНСС, e-mail: miryana_hristova@abv.bg

Бележки:

1. За нашите разглеждания е нужно произволните числа b_{l,k_l} да са такива, че написаните степенни редове да са сходящи. Едно очевидно достатъчно условие за това е редицата $\{b_{l,k_l}\}_{k_l=0}^{\infty}$ да бъде ограничена. Това е изпълнено в много важни частни случаи, подобни на частното интегриране относно променливата z_l .

2. Изглежда, че по-голяма общност ще има, ако се разглеждат степени $M_l^{q_l}$ на M_l , но тогава всъщност имаме оператор от същия вид, който в скобите в (2) има нови коефициенти $b_{l,k_l} b_{l,k_l+p_l} \dots b_{l,k_l+(q_l-1)p_l}$ и нов параметър $q_l p_l$, показващ промяната на степените на z_l .

Дефиниция 1. Казваме, че един линеен оператор L комутира разделно с едно множество от фиксирани оператори $\{M_{l_j}\}$, ако $LM_{l_j} = M_{l_j}L$ за всяко j . Множеството от всички такива оператори се нарича *разделен комутант* на $\{M_{l_j}\}$ и ще бъде означавано с $C_{\{M_{l_j}\}}$.

В тази статия най-напред ще опишем комутанта C_{M_l} на оператор M_l , дефиниран с (1) или (2) в двата случая $p_l = 0$ и $p_l \geq 1$. След това ще комбинираме тези резултати, за да опишем комутирането с композиция от такива оператори, действащи върху различни променливи. Тук ще следваме идеите от доказателствата в едномерния случай, направени в нашата предишна статия Hristova (1991).

Започваме със случая, когато $p_l = 0$, в който се налагат някои допълнителни ограничения за редицата $\{b_{l,k_l}\}_{k_l=0}^{\infty}$:

Теорема 1. Нека l е цяло число, $0 \leq l \leq s$, и $p_l = 0$ в дефиницията (1) или (2) на оператора M_l . Нека допълнително числата b_{l,k_l} , $k_l = 0, 1, 2, \dots$, бъдат различни помежду си, т.е. $b_{l,k_{l_m}} \neq b_{l,k_{l_n}}$ за $l_m \neq l_n$. Тогава един линеен оператор $L: A_0 \rightarrow A_0$ комутира разделно с M_l тогава и само тогава, когато за всяко $y(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k z^k$ има вида

$$Ly(z_1, \dots, z_l, \dots, z_s) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_s=0}^{\infty} a_{k_1, \dots, k_l, \dots, k_s} \times \\ \times \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_{l-1}=0}^{\infty} \times \sum_{j_{l+1}=0}^{\infty} \dots \sum_{j_s=0}^{\infty} d_{k_1, \dots, k_s, j_1, \dots, j_{l-1}, j_{l+1}, \dots, j_s} z_1^{j_1} \dots z_{l-1}^{j_{l-1}} z_l^{k_l} z_{l+1}^{j_{l+1}} \dots z_s^{j_s} \quad (3)$$

където $d_{k_1, \dots, k_s, j_1, \dots, j_{l-1}, j_{l+1}, \dots, j_s}$ са произволни комплексни числа, но такива, че редовете в (3) да са сходящи в околност на координатното начало.

Доказателство: Нека действието на един оператор L върху произволна мултистепен z^k е

$$Lz^{k_1} \dots z^{k_l} \dots z^{k_s} = \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_l=0}^{\infty} \dots \sum_{j_s=0}^{\infty} c_{k_1, \dots, k_s, j_1, \dots, j_l, \dots, j_s} z_1^{j_1} \dots z_l^{j_l} \dots z_s^{j_s}$$

с неизвестни коефициенти $c_{k_1, \dots, k_s, j_1, \dots, j_l, \dots, j_s}$.

Следващата стъпка е да се изразят $LM_l z^k$ и $M_l L z^k$ за произволна мултистепен $z^k = z_1^{k_1} \dots z_l^{k_l} \dots z_s^{k_s}$, но тук ще пропуснем записването на дългите суми и ще дадем на-

право сравняването на коефициентите пред еднаквите степени $z^j = z^{j_1} \dots z^{j_l} \dots z^{j_s}$, $|j| = 0, 1, 2, \dots$ в комутационното равенство $LM_l z^k = M_l L z^k$:

$$b_{l,k_l} c_{k_1, \dots, k_s, j_1, \dots, j_l, \dots, j_s} = b_{l,j_l} c_{k_1, \dots, k_s, j_1, \dots, j_l, \dots, j_s}.$$

От условието $b_{l,k_l} \neq b_{l,j_l}$ за $k_l \neq j_l$ следва, че

$$c_{k_1, \dots, k_s, j_1, \dots, j_l, \dots, j_s} = \begin{cases} 0, & j_l \neq k_l \\ d_{k_1, \dots, k_s, j_1, \dots, j_{l-1}, j_{l+1}, \dots, j_s}, & j_l = k_l \end{cases}$$

където $d_{k_1, \dots, k_s, j_1, \dots, j_{l-1}, j_{l+1}, \dots, j_s}$ могат да бъдат избрани произволно, в частност различни от нула. Следователно

$$L z^{k_1} \dots z^{k_l} \dots z^{k_s} = \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_{l-1}=0}^{\infty} \sum_{j_{l+1}=0}^{\infty} \dots \sum_{j_s=0}^{\infty} d_{k_1, \dots, k_s, j_1, \dots, j_{l-1}, j_{l+1}, \dots, j_s} z_1^{j_1} \dots z_{l-1}^{j_{l-1}} z_l^{k_l} z_{l+1}^{j_{l+1}} \dots z_s^{j_s}$$

и остава да заместим това представяне в $Ly(z) = L \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k L z^k$, за да получим, че (3) е необходимо условие.

Ще пропуснем проверката на достатъчността на (3), тъй като тя се извършва с директно пресмятане на $LM_l z^k$ и $M_l L z^k$.

Можем да формулираме едно следствие на Теорема 1 относно комутирането с произволно множество от оператори $M_{l_1}, \dots, M_{l_q}$, $1 \leq l_1 < \dots < l_q \leq s$, $1 \leq q \leq s$, дефинирани чрез бу (1) or (2). Формулировката ще бъде улеснена, ако предположим, че комутирането е с първите q оператора:

Следствие 1: Нека q е цяло число, $1 \leq q \leq s$, и $p_l = 0$ за $1 \leq l \leq q$. Тогава един линеен оператор $L: A_0 \rightarrow A_0$ комутира разделно с всеки от операторите M_l , $1 \leq l \leq q$, дефинирани с (1) или (2), тогава и само тогава, когато за всяко $y(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k z^k$ има вида

$$Ly(z_1, \dots, z_l, \dots, z_s) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_s=0}^{\infty} a_{k_1, \dots, k_s} \sum_{j_{q+1}=0}^{\infty} \dots \sum_{j_s=0}^{\infty} d_{k_1, \dots, k_s, j_{q+1}, \dots, j_s} z_1^{k_1} \dots z_q^{k_q} z_{q+1}^{j_{q+1}} \dots z_s^{j_s} \quad (4)$$

където $d_{k_1, \dots, k_s, j_{q+1}, \dots, j_s}$ са произволни комплексни числа, но такива, че редовете в (4) да бъдат сходящи в околност на координатното начало.

Доказателство: Представянето (4) получаваме от факта, че сечението $\bigcap_{l=1}^q K_{M_l}$ на комутантите на операторите M_l , $1 \leq l \leq q$, всеки от които има вида (3), дава описание на едновременно разделно комутиране с тези оператори.

Сега ще опишем комутанта на оператора M_l в случая $p_l \geq 1$, т.е. когато степените само на променливата z_l се покачват с едно и също число. В едномерния случай такива разглеждания са правени от автора в [Hristova (1991)] и затова тук няма да правим доказателството, защото то повтаря едномерните разсъжденията по отношение само на една от променливите, а именно z_l , а останалите променливи остават непроменени.

Теорема 2. Нека l е цяло число, $0 \leq l \leq s$, и $p_l \geq 1$ в дефиницията (1) или (2) на оператора M_l . Тогава един линеен оператор $L: A_0 \rightarrow A_0$ комутира разделно с M_l тогава и само тогава, когато за всяко $y(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k z^k$ има вида

$$\begin{aligned}
 Ly(z) = & \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_{l-1}=0}^{p-1} \dots \sum_{k_s=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_s=0}^{\infty} a_k c_{k,j} z^j + \\
 & + \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_l=p}^{\infty} \dots \sum_{k_s=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_l=\left[\frac{k_l}{p}\right]p}^{\infty} \dots \sum_{j_s=0}^{\infty} a_k \frac{b_{j_l-p} \dots b_{j_l-\left[\frac{k_l}{p_l}\right]p_l}}{b_{k_l-p} \dots b_{k_l-\left[\frac{k_l}{p_l}\right]p_l}} c_{k_1, \dots, k_l - \left[\frac{k_l}{p_l}\right]p, \dots, k_s, j_1, \dots, j_l - \left[\frac{k_l}{p_l}\right]p, \dots, j_s} z^j,
 \end{aligned} \quad (5)$$

където числата $c_{k_1, \dots, k_l - \left[\frac{k_l}{p_l}\right]p, \dots, k_s, j_1, \dots, j_l - \left[\frac{k_l}{p_l}\right]p, \dots, j_s}$ могат да се избират произволно, но така,

че редовете в описанието (5) да са сходящи в околност на координатното начало.

И в случая на покачване на степените на повече от една от променливите с различни числа можем да формулираме едно следствие на Теорема 2 относно комутирането с произволно множество от оператори $M_{l_1}, \dots, M_{l_q}$, $1 \leq l_1 < \dots < l_q \leq s$, $1 \leq q \leq s$, дефинирани чрез бу (1) or (2). Отново ще предположим за по-лесно формулиране, че комутирането е с първите q оператора:

Следствие 2. Нека q е цяло число, $1 \leq q \leq s$, и $p_l \geq 0$ за $1 \leq l \leq q$. Тогава един линейен оператор $L: A_0 \rightarrow A_0$ комутира разделно с всеки от операторите M_l , $1 \leq l \leq q$, дефинирани с (1) или (2), тогава и само тогава, когато за всяко $y(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k z^k$ има вида

$$\begin{aligned}
 Ly(z) = & \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_s=0}^{\infty} \sum_{j_1=\left[\frac{k_1}{p_1}\right]p_1}^{\infty} \dots \sum_{j_q=\left[\frac{k_q}{p_q}\right]p_q}^{\infty} \sum_{j_{q+1}=0}^{\infty} \dots \sum_{j_s=0}^{\infty} a_k \times \\
 & \times \frac{b_{j_1-p_1} \dots b_{j_1-\left[\frac{k_1}{p_1}\right]p_1}}{b_{k_1-p_1} \dots b_{k_1-\left[\frac{k_1}{p_1}\right]p_1}} \dots \frac{b_{j_q-p_q} \dots b_{j_q-\left[\frac{k_q}{p_q}\right]p_q}}{b_{k_q-p_q} \dots b_{k_q-\left[\frac{k_q}{p_q}\right]p_q}} c_{k_1 - \left[\frac{k_1}{p_1}\right]p_1, \dots, k_q - \left[\frac{k_q}{p_q}\right]p_q, j_{q+1}, \dots, k_s, j_1 - \left[\frac{k_1}{p_1}\right]p_1, \dots, j_q - \left[\frac{k_q}{p_q}\right]p_q, j_{q+1}, \dots, j_s} \times \\
 & \times z_1^{j_1+p_1} \dots z_q^{j_q+p_q} z_{q+1}^{j_{q+1}} \dots z_s^{j_s},
 \end{aligned} \quad (6)$$

където комплексните числа $c_{r_1, \dots, r_k, k_{q+1}, \dots, k_s, j_1 - \left[\frac{k_1}{p_1}\right]p_1, \dots, j_q - \left[\frac{k_q}{p_q}\right]p_q, j_{q+1}, \dots, j_s}$, $0 \leq r_l \leq p_l - 1$,

$1 \leq l \leq q$, са произволни, но такива, че редовете в описанието да са сходящи в околност на координатното начало, а гробоите се считат равни на единица когато

$0 \leq k_l \leq p_l - 1$, $1 \leq l \leq q$, за да се избегне разделянето на всяка от сумите $\sum_{k_i=0}^{\infty}$ на $\sum_{k_i=0}^{p_l-1}$ и $\sum_{k_i=p_l}^{\infty}$.

Доказателство: Както в Следствие 1 комутантът е сечението $\bigcap_{l=1}^q K_{M_l}$ на комутантите на операторите M_l , всеки от които има вида (3).

Сега ще опишем смесен вариант на разделно комутиране, при който част от числата p_l ще бъдат положителни, докато други ще бъдат равни на нула.

Теорема 3. Нека q и t са цели числа, $1 \leq q < t \leq s$. Нека $p_l \geq 1$ за $1 \leq l \leq q$, а $p_l = 0$ за $q+1 \leq l \leq t$. Един линейен оператор $L: A_0 \rightarrow A_0$ комутира разделно с операторите M_l ,

$1 \leq l \leq q$, тогава и само тогава, когато има вида

$$Ly(z) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_s=0}^{\infty} \sum_{j_1=\left[\frac{k_1}{p_1}\right]p_1}^{\infty} \dots \sum_{j_q=\left[\frac{k_q}{p_q}\right]p_q}^{\infty} \sum_{j_{q+1}=0}^{\infty} \dots \sum_{j_s=0}^{\infty} a_k \times \frac{b_{j_1-p_1} \dots b_{j_l-\left[\frac{k_l}{p_l}\right]p_l}}{b_{k_1-p_1} \dots b_{k_l-\left[\frac{k_l}{p_l}\right]p_l}} \dots \frac{b_{j_q-p_q} \dots b_{j_q-\left[\frac{k_q}{p_q}\right]p_q}}{b_{k_q-p_q} \dots b_{k_q-\left[\frac{k_q}{p_q}\right]p_q}} \times \quad (7)$$

$$\times c_{k_1-\left[\frac{k_1}{p_1}\right]p_1, \dots, k_q-\left[\frac{k_q}{p_q}\right]p_q, k_{q+1}, \dots, k_s, j_1-\left[\frac{k_1}{p_1}\right]p_1, \dots, j_q-\left[\frac{k_q}{p_q}\right]p_q, j_{t+1}, \dots, j_s} z_1^{j_1+p_1} \dots z_q^{j_q+p_q} z_{q+1}^{k_{q+1}} \dots z_t^{k_t} z_{t+1}^{j_{t+1}} \dots z_s^{j_s},$$

където $C_{r_1, \dots, r_q, k_{q+1}, \dots, k_s, j_1, \dots, j_q, j_{t+1}, \dots, j_s}$, $0 \leq r_l \leq p_l - 1$, $0 \leq l \leq q$, са произволни комплексни числа, но такива, че редовете в (7) да са сходящи в околност на координатното начало и гробите

$$\frac{b_{j_l-p_l} \dots b_{j_l-\left[\frac{k_l}{p_l}\right]p_l}}{b_{k_l-p_l} \dots b_{k_l-\left[\frac{k_l}{p_l}\right]p_l}}$$

се считат равни на единица за $0 \leq k_l \leq p_l - 1$, $0 \leq l \leq q$, за да се избегне разделянето на всяка от сумите $\sum_{k_l=0}^{\infty}$ на $\sum_{k_l=0}^{p_l-1}$ и $\sum_{k_l=p_l}^{\infty}$.

Доказателство: Представянето (7) се получава като следствие на Теорема 1 и Теорема 2, разглеждайки сечението на комутантите C_{M_l} , $0 \leq l \leq q$, описани с (5), и C_{M_l} , $q+1 \leq l \leq t$, описани с (3).

Бележка: В тази статия разгледахме една от възможностите за обобщаване на понятието комутант в многомерния случай, а именно *разделното комутиране*, като описавме разделния комутант на общия оператор, зададен с (2). Частен случай на получения резултат е разгледан от Райчинов в Raichinov, 1978.

Друг вариант за дефиниране на многомерен комутант за същия общ оператор (2), а именно *съвместното комутиране*, ще бъде разгледан от автора в отделна публикация.

Литература

Христова, М. С., 1988. Обобщен оператор на Харди-Литълвуд за функции на много комплексни променливи. Год. ВУЗ, Прил. мат. 24, 3, 157-168.

Hristova, M., 1991. Some Commutational Properties of a General Operator.

Complex Analysis and Generalized Functions, Fifth International Conference on Complex Analysis and Applications with Symposium on Generalized Functions, September 15-21, 1991, Varna, Bulgaria, 1993, 132-140.

Raichinov, I., 1978. Linear Operators Defined in Spaces of Complex Functions of Many Variables and Commuting with the Operators of Integration, *Serdica, Bulgaricae mathematicae publications*, 4,4, 316-323.