Някои основни зависимости в баланса на междуотрасловите връзки и уточняване на терминологията

Георги Киранчев*

Резюме: В статията са разгледани различията между понятията „мултипликатори" и „пълни разходи" в баланса на междуотрасловите връзки. Доказано е каква е разликата между тях. Изведени и систематизирани са различни начини за изчисляване на пълните и на косвените разходи. Изведена е формула за изчисляване на косвени разходи от произволен концентър.

Ключови думи: пълни разходи, баланса на междуотрасловите връзки.

JEL: D57.

Причината за написването на тази статия е установеният след едногодишно проучване факт, че основни термини и основни зависимости от модела на баланса на междуотрасловите връзки остават неясни не само за хора, които използват този модел в своята научноизследователска дейност, но дори и за тези, които по силата на своето положение преподават този модел на студентите и поради това преподават неточни и неверни знания.

Изясняването на тези неясноти е основната цел на настоящата статия. За нейното по-добро разбиране е необходимо читателите да са запознати с минимума от знания по линейна алгебра и по модела на баланса на междуотрасловите връзки. Незапознатите с този модел по всяка вероятност няма да получат полезни знания от нейния прочит. Желаещите да се запознаят с този уникален модел биха могли да го направят „от извора" (Леонтиев, 1994).

В статията ще отговорим на следните въпроси:

- Каква е разликата между мултипликатори и пълни разходи?
- Как се изчисляват коефициентите на пълните разходи?
- Как се изчисляват коефициентите на косвените разходи?
- Какво измерва произведението $A.(E-A)^{-1}$?
- Какво измерва произведението $(E-A)^{-1}.A$?
- Какво измерва произведението $A.(E-A)^{-1}.A$?
- Как се изчисляват сумарните пълни разходи?

Съществуват две основни балансови уравнения:

Първото описва разпределението на общата продукция (X) по направление на използване – разходи за производство на продукцията и крайна продукция/крайно потребление (Y): **уравнение 1 Балансово уравнение на използването на общата продукция на икономическата система** $X = A.X + Y$

Второто описва аналитично връзката между обща и крайна продукция: **уравнение 2 Връзка между обща и крайна продукция** $X = (E-A)^{-1}.Y$

* Георги Киранчев е доктор, доцент в катедра „Маркетинг и стратегическо планиране" на УНСС.

Именно на второто балансово уравнение се обръща основното внимание както при използване, така и при преподаване на модела на баланса на междуотрасловите връзки. И именно в това уравнение се появява една матрица (матрицата $(E-A)^{-1}$), с която започват терминологичните проблеми и обърквания.

Ако в първото уравнение всеки от елементите има свое ясно значение и дефиниция, то появата на новия елемент поставя въпроса каква точно е икономическата интерпретация на този елемент.

В западната литература той просто е назован „матрица на мултипликаторите", кратко и неясно. Въпреки че от гледна точка на получаването им това са именно мултипликатори, с това се изчерпва и цялата икономическа интерпретация – това са мултипликатори и край. Съществува също така понятието "total material requirement (TMR)", но то се третира доста широко и различно от различни организации. Така, например, Европейската Агенция по Околна Среда дава следната дефиниция: „…изразява общата маса от **първични материали**, извличани от природата за поддържане на човешката дейност. TMR е силно агрегиран индикатор за **материалната** база на икономиката…". Очевидно това разбиране се отдалечава изобщо от идеите на модела на баланса на междуотрасловите връзки.

В родната и рускоезичната литература е възприет терминът „коефициенти на пълните разходи", който поставя на първо място икономическата интерпретация на коефициентите. Дефиницията на коефициентите на пълните разходи е „сумата на коефициентите на преките и косвените разходи", като обаче на косвените разходи се дава по-скоро описателно определение, за разлика от преките, които имат свой израз (матрицата на преките разходи *A*) и чието определение се дава още в началото на запознаването с модела на баланса на междуотрасловите връзки. Получава се определено несъответствие – преките разходи са изяснени и изчислени (и изчислими), а за косвените не е даден начин за изчисляване, въпреки че са дефинирани описателно. Това поставя проблем – как могат да бъдат изчислени косвените разходи? Как да бъдат изчислени пълните разходи, за които знаем, че са сума от преките и косвените, след като не знаем как да изчислим косвените? Проблемът е решен лесно… и невярно. Матрицата на мултипликаторите е наречена матрица на пълните разходи, което, макар и да е близко до истината (с точност до една матрица разлика), все пак не е точно. На изясняването на различието между матрица на мултипликаторите и матрица на пълните разходи е посветена първата част на тази статия.

Как се изчисляват коефициентите на пълните разходи?

Ще докажем че коефициентите на пълните разходи могат да се изчислят като произведенията $A.(E-A)^{-1}$, $(E-A)^{-1}.A$ или като разликата $(E-A)^{-1}-E$.

Нека заместим в основното балансово уравнение 1 *X* в частта на разходите (в дясната страна на уравнението) с израза за неговото изчисляване от основното балансово уравнение 2: $X=A.(E-A)^{-1}.Y+Y$

Получаваме израза $A.(E-A)^{-1}.Y$ на мястото на разходите и тъй като всички останали членове на уравнението са останали неизменени, то този израз е равен на разходите на икономическата система, но записани като произведение на **пълните разходи** и вектора на крайната продукция. Следователно, именно матрицата $A.(E-A)^{-1}$ служи за изчисляване на матрицата от коефициентите на пълните разходи, а не матрицата на мултипликаторите.

Този израз не противоречи, а потвърждава общия принцип за изчисляване на произволни пълни ефекти (в т.ч. и на пълни разходи) – матрицата на мултипликаторите се умножава отляво с вектор-реда на преките ефекти (ефектът на единица обща продукция). В случая матрицата на мултипликаторите е умножена отляво с матрицата на преките разходи, чиито редове са вектори-редове на преки ефекти (материални разходи). Резултатът е матрицата на пълните разходи.

Каква е разликата между матрицата на мултипликаторите и матрицата на пълните разходи?

Ще докажем, че матрицата на пълните разходи е равна на разликата между матрицата на мултипликаторите и единичната матрица.

Доказателство:

Изчисляваме разликата между двата израза:

$(E-A)^{-1} - A.(E-A)^{-1} = (E-A).(E-A)^{-1} = E$,

Q.E.D.

Разликата между мултипликатори и пълни разходи в балансовото уравнение е единичната матрица. Затова и умножаването на матрицата на мултипликаторите с вектора на крайната продукция дава като резултат цялата обща продукция на системата (а не само частта на разходите в системата), която може да бъде записана и като сума от разходи и крайна продукция, но разходите може да се запишат по два начина:

1) като произведение на матрицата на преки разходи A и вектора на общата продукция X, което се прави в уравнение (1)

2) като произведение на матрицата на пълни разходи $A.(E-A)^{-1}$ и вектора на крайната продукция Y, както направихме току-що.

Възможен е и друг запис на пълните разходи. На пръв поглед той може да изглежда парадоксален, тъй като от линейната алгебра ние знаем, че ако имаме две матрици A и B, то произведението A.B в общия случай не е равно на произведението B.A, когато и двете умножения са възможни. В нашия случай ние ще докажем, че матрицата $(E-A)^{-1}.A$ също е израз за изчисляване на матрицата на пълните разходи, т.е. че:

$A.(E-A)^{-1} = (E-A)^{-1}.A$

Доказателство:

Ние вече знаем, че $A.(E-A)^{-1} = (E-A)^{-1} - E$

Ще запишем $E = (E-A)^{-1}.(E-A)$ и ще я заместим в горното равенство.

Получаваме

$A.(E-A)^{-1} = (E-A)^{-1} - (E-A)^{-1}.(E-A)$

След като групираме, се получава $A.(E-A)^{-1} = (E-A)^{-1}.[E-(E-A)] = (E-A)^{-1}.A$

Следователно $A.(E-A)^{-1} = (E-A)^{-1}.A$,

Q.E.D.

За да получим матрицата на пълните разходи, можем да умножим матрицата на мултипликаторите отляво или отдясно с матрицата на преките разходи A, без това да промени резултата.

ВНИМАНИЕ! От горното доказателство не следва, че произволни пълни ефекти също могат да бъдат изчислени, като се умножи отдясно матрицата на мултипликаторите с вектор-колоната (или аналогична матрица) на преките ефекти. Както ще видим в последната част на статията, горната зависимост се дължи на характерна особеност на матрицата на мултипликаторите.

Сега вече имаме три варианта за изчисляване на матрицата на пълните разходи и всеки от тях може да бъде практически използван за изчисления в зависимост от това кой е по-удобен в конкретния случай.

След като имаме точен израз за изчисляване на матрицата на пълните разходи, остава да получим израз за изчисляване на косвените разходи.

Темата за изчисляването на косвените разходи съвсем не е безинтересна за изследователите, използващи модела на баланса на междуотрасловите връзки. На първо място, защото косвените разходи често пъти превишават в пъти преките и защото косвени разходи съществуват дори в тези клетки на матрицата на косвените разходи (и на пълните разходи), в които преките разходи са нулеви. Тогава пълните разходи са равни на косвените и игнорирането им води до изкривяване на оценките и до неадекватна представа как функционира икономиката. На второ място, колкото по-сложна е икономическата система, толкова (относително) по-големи ще бъдат в нея косвените разходи и свързаните с тях и изчислявани чрез тях различни косвени ефекти. Възможностите на модела на баланса на междуотрасловите връзки да измерва тези косвени ефекти го правят уникален и незаменим вече почти цял век инструмент за анализ на процесите, протичащи в икономиката и за техните ефекти извън нея. Незнанието и неотчитането на косвените ефекти, концентрирането само върху преките ефекти е причината за така често срещаното повърхностно възприемане на икономиката (и съответните на това възприемане повърхностни решения) и неизбежната изненада, когато резултатите от дадени решения и действия се получат съвсем различни от очакваните.

Как се изчисляват коефициентите на косвените разходи?

Изхождайки от дефиницията на пълните разходи като сума от преките и косвените разходи, ще започнем извеждането на израза за косвените разходи като разлика между пълните и преките разходи:

$$A.(E-A)^{-1}-A=A.[(E-A)^{-1}-E]$$

Ще запишем матрицата E като произведението $(E-A)^{-1}.(E-A)$. Получаваме следния израз:

$$A.[(E-A)^{-1}-E]=A.[(E-A)^{-1}-$$

$$(E-A)^{-1}.(E-A)]=A.[(E-A)^{-1}.(E-E+A)]$$

$$=A.[(E-A)^{-1}.A]$$

Доказахме, че изразът $A.(E-A)^{-1}.A$ изчислява матрицата на косвените разходи.

Ще докажем и че:

$$A.(E-A)^{-1}.A=(E-A)^{-1}.A^2=A^2.(E-A)^{-1}$$

Доказателство:

Вече доказахме, че $A.(E-A)^{-1}=(E-A)^{-1}.A$.

Можем да заместим в израза $A.(E-A)^{-1}$ частта $(E-A)^{-1}.A$ с $A.(E-A)^{-1}$ и ще получим $A^2.(E-A)^{-1}$.

Следователно, $A.(E-A)^{-1}.A=A^2.(E-$,

Q.E.D.

Или, чрез аналогично заместване, можем да докажем и $A.(E-A)^{-1}.A=(E-A)^{-1}.A^2$

Можем да представим в таблица изчисляването на различните елементи и различията между тях (таблица 1).

Таблица 1. *Функционална връзка между различните коефициенти в баланса на междуотрасловите връзки*

Елемент	Изчисление на елементите	Връзка между елементите на различните матрици
Косвени разходи	$A.(E-A)^{-1}.A$	-
Пълни разходи	$A.(E-A)^{-1}$	$A.(E-A)^{-1}=A.(E-A)^{-1}.A+A$
Мултипликатори	$(E-A)^{-1}$	$(E-A)^{-1}=A.(E-A)^{-1}.A+A+E$

Както се вижда, матрицата на мултипликаторите участва във всеки от изразите, което показва още веднъж фундаменталното значение на тази матрица в системата на баланса на междуотрасловите връзки.

Защо няма значение дали ще умножим матрицата на мултипликаторите отляво или отдясно? Не противоречи ли това на нашите знания от линейната алгебра? За да отговорим на тези два въпроса е достатъчно да знаем, че всъщност матрицата на мултипликаторите (както и други мултипликатори, използвани в икономическата теория) е граница на сумата на членовете на безкрайна геометрична прогресия. Собствено, затова и тази матрица се нарича матрица на мултипликаторите.

$$(E-A)^{-1} = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

Нека запишем тази сума в разгърната форма: $(E-A)^{-1} = A^0 + A^1 + A^2 + A^3 + \cdots$

Сега можем да запишем и матрицата на пълните разходи, и матрицата на косвените разходи също като суми **на част** от елементите на горната сума:

$$A.(E-A)^{-1} = A.(A^0 + A^1 + A^2 + A^3 + \cdots) =$$
$$(A^0 + A^1 + A^2 + A^3 + \cdots).A = A^1 + A^2 + A^3 + \cdots$$

Матрицата на пълните разходи тук е представена като сума от степени на матрицата на преките разходи, от първа степен до безкрайност. Това не противоречи на дефиницията на пълните разходи – матрицата на преките разходи е първото събираемо в реда.

По същия начин матрицата на косвените разходи може да бъде представена като сума от степени на матрицата на преките разходи, но вече от втора степен до безкрайност:

$$A.(E-A)^{-1}.A = A.(A^0 + A^1 + A^2 + A^3 + \cdots)$$
$$.A = A^2 + A^3 + \cdots$$

Сега вече е ясно защо няма значение дали матрицата на мултипликаторите се умножава отляво или отдясно с матрицата на преките разходи – всички събираеми са степени на една и съща матрица (Тривиално ясно е, че А.А=А.А и въпросът коя матрица е отляво и коя – отдясно е безсмислен), матрицата на преките разходи А.

По същата логика и при необходимост могат да бъдат изчислявани и косвените разходи от различни концентри – като разлика между разходите от предишен концентър и разходите от следващия концентър.

Терминът „концентър" е по-слабо познат и е въведен за илюстриране на това как производството на една единица крайна продукция от даден продукт предизвиква затихваща вълна от производства на множество други продукти в цялата икономика, за да бъдат покрити всички необходими (пълни) разходи за производството на въпросната единица крайна продукция. Така, например, необходимите преки разходи за производството на единицата крайна продукция изискват определени преки разходи, за да бъдат произведени самите те. Тези нови разходи представляват косвени разходи от първи концентър. Но за да бъдат произведени и те, е нужно да бъдат произведени продуктите за техните преки разходи, които образуват вече косвените разходи от втори концентър и т.н. до безкрайност. Всичките тези косвени разходи, сумирани по всички концентри образуват и сумата на косвените разходи.

Ако например се интересуваме от косвените разходи от първи концентър, трябва да извадим от косвените разходи сумата на косвените разходи от следващите концентри:

$$(A^2 + A^3 + \cdots) - (A^3 + A^4 + \cdots) = A^2$$

Както се вижда, косвените разходи от първи концентър се изчисляват като втора степен на матрицата на преките разходи А, което е логично, като се има предвид, че първата степен на тази матрица са самите преки разходи.

Как се изчисляват сумарните пълни разходи?

Неправилният начин за тяхното изчисляване, който произтича от незнанието на разликата между мултипликатори и коефициенти на пълните разходи, е да се съберат по колона елементите от матрицата на мултипликаторите.

Съкратеният (мързеливият) начин за тяхното изчисляване е да се извади 1 от получените суми по горния, неправилен начин. Проблемът при използването на този начин, който несъмнено дава верни резултати, е, че неговото обосноваване често се свежда до „защото така ми се получават верни резултати“.

Ако означим с S' = (1 1 1 … 1) т.нар. сум-вектор (нарича се така, защото умножението с него на някаква матрица води до сумирането на нейните елементи), то можем да напишем някои уравнения, които ще обяснят защо верният начин е верен.

Преди всичко, нека получим сумата на всички преки разходи (материални и на услуги) за производството на единица продукция, т.е. – сумата на елементите на матрицата на преките разходи *A* по колони. В матричен запис тя ще изглежда така: $S'.A$. Това е векторът на сумарните преки разходи по отрасли, известен още като вектор на пряката материалоемкост (Названието е останало от времето, когато за разходи в отраслите са признавани единствено материалните разходи в съответствие с ограничената концепция за производство). В пълно съответствие с общия метод за изчисляване на пълни ефекти, в случая – на пълните разходи, можем да запишем, че векторът на пълните разходи *M'* се изчислява както и всеки вектор на пълни ефекти като: $M' = S' A.(E-A)^{-1}$

Но ние вече знаем, че именно матрицата $A.(E-A)^{-1}$ е матрицата от коефициентите на пълните разходи, в един от възможните нейни записи. Умножаването на тази матрица отляво със сум-вектора просто събира по колона коефициентите на пълните разходи.

Като знаем, че $A.(E-A)^{-1} = (E-A)^{-1} - E$, което вече беше доказано, можем да обясним и защо съкратеният начин на изчисляване на сумарните пълни разходи е верен:

$$S' A.(E-A)^{-1} = S'.[(E-A)^{-1} - E]$$
$$= S'.(E-A)^{-1} - S'$$

Да, наистина, достатъчно е от сумата по колона на мултипликаторите да се извади 1, за да се получи сумата на пълните разходи.

И накрая, защо няма смисъл да се изчислява вектор на „пълната добавена стойност“, тъй като той тривиално дава като резултат сум-вектора?

Нека означим с *W'* вектор-реда от елементите в трети квадрант на баланса на междуотрасловите връзки, които допълват направените разходи (посочени в първи квадрант) до размера на продукцията по базисни цени. Ако работим с нормирани величини, т.е. предварително разделени на обема на продукцията в стойностно изражение, то очевидно ще получим $S' A + W' = S'$.

Това е още един, по-малко популярен израз от модела на баланса на междуотрасловите връзки, което не омаловажава неговите аналитични възможности.

Сега можем да запишем израза за получаване на пълните ефекти от трети квадрант:

$$W'.(E-A)^{-1} = S'.(E-A).(E-A)^{-1} = S'$$

Наистина, няма нужда да се изчислява сум-вектора, защото ние винаги знаем как изглежда той. В действителност, горното изчисление има смисъл, когато след някакви преобразувания на данни сме получили някаква нова матрица на преките разходи и на елементите на трети квадрант. Тогава можем да проверим дали нашите преобразувания са били коректни, т.е. да проконтролираме коректността на емпирично получения резултат, сравнявайки го с теоретично верния. Все пак, не трябва да се забравя, че всички изчисления се правят с някаква крайна точност, особено когато се изчислява матрицата на мултипликаторите и е възможно да се получат разминавания, които следва да ни покажат какъв е размерът на натрупаната при изчисленията грешка.

Надяваме се, че тези кратки бележки ще внесат яснота както при употребата на термини, близки по значение, но все пак различни, така и при изчисляването на матриците, които се назовават с тези термини. Различните формули за изчисляване на пълните и косвените разходи могат да помогнат на изследователите в техните теоретични разработки, когато са им необходими аналитични доказателства или трансформации.

Цитирани източници:

Леонтиев, В., 1994. Харвардски университет, Есета по икономика, Нюйоркски университет, издателство „Христо Ботев“.

(Leontiev, V., 1994. Harvardski universitet, Eseta po ikonomika, Nyuyorkski universitet, izdatelstvo „Hristo Botev“)