

Анализ на цикличните компоненти на борсовия индекс S&P 500 чрез трансформация с вълнички

Боряна Богданова*, Божидар Недев**

Резюме: Статията извършва методологичен обзор по отношение на трансформацията с вълнички и приложението ѝ във финансите и икономиката. По този начин се извеждат предимствата на „вълничката“ като сравнително нов метод пред алтернативните подходи за времево-честотен анализ на даден времеви ред. Този новаторски подход би трябвало да бъде пренебрегван от икономическата академична общност като цяло поради предпочитанието да се прилага традиционният иконометричен инструментариум. Трансформацията с вълнички съумява да разгуби структурата на даден времеви ред на по-прости фрагменти, съответстващи на различните честоти. Основната цел на статията се изразява в проследяването на времево-честотните характеристики на изменението на месечните цени при затваряне на индекса S&P 500 за период от 65 години. Представени са възможностите за едномерен анализ, които предлагат непрекъснатата трансформация с вълнички. Резултатите показват, че времевата структура на данните претърпява съществени изменения през анализирания период от време с ясно изразена поява на технологичния балон и ипотечната криза от 2007-2008 г.

* Боряна Богданова е доктор, доцент в катедра "Статистика и иконометрия", Стопански факултет на СУ "Св. Климент Охридски".

** Божидар Недев е доктор, асистент в катедра "Финанси и счетоводство", Стопански факултет на СУ "Св. Климент Охридски".

Ключови думи: трансформация с вълнички, капиталови пазари, S&P 500, циклични компоненти, икономически кризи.

JEL: C02, C22, G01, G12.

Увод

Прилагането на анализ с *вълнички* (англ. *wavelets*) разкрива нови обстоятелства, касаещи времевата структура на икономическите и финансовите времеви редове както и структурните изменения, настъпили по време на пазарни сривове и през следкризисните периоди. Освен това, практическите приложения на трансформацията с вълнички обхващат множество направления в емпиричните финанси. Нека да разгледаме някои от направленията в науката, при които трансформацията с вълнички намира приложение. Rua & Nunes (2009) изследват синхронизираността при възвращаемостите на международните капиталови пазари, която представлява една от основните тематиките във финансите поради изключително важните си изводи, свързани с управлението на риска и разпределението на активите. Традиционният похват за изследване на синхронизираността е корелационният коефициент, който Rua & Nunes (2009) заменят с непрекъснатата трансформация с вълнички. Двата автори обосновават своето решение със съществуването на две основни групи инвеститори в зависимост от своя инвестиционен хоризонт – краткосрочен или дългосрочен. Краткосрочните инвеститори

ще са по-заинтересовани от синхронизираността на възвращаемостите при краткосрочните колебания (т.е. при по-високите честоти), докато дългосрочните инвеститори ще насочват вниманието си към измененията в дългосрочен план (т.е. към по-ниските честоти). Трансформацията с вълнички дава уникалната възможност за едновременно изследване на възвращаемостите на капиталовите пазари от гледна точка на времето и честотата.

Друго приложение на инструментариума, основан на метода на вълничките, може да бъде разгледано в статията на Bogdanova & Ivanov (2016), където се анализират и прогнозираят финансови времеви редове, характеризиращи се с висока дългосрочна зависимост. Двамата учени изследват шест пазарни индекса в Югоизточна Европа (България, Сърбия, Хърватия, Гърция, Турция и Русия), като проследяват развитието на дългосрочната зависимост в техните възвращаемости чрез използване на полу-параметричен метод, основан на теорията на вълничките. Двамата автори установяват, че приложеният от тях метод отчита в пълнота измененията на дългосрочната зависимост, независимо дали борсовите пазари се намират в стабилно или кризисно положение. Освен това, Bogdanova & Ivanov (2016) прилагат специален вид дискретна трансформация с вълнички, наречена *трансформация с дупки* (от френски език *à trous wavelet transform*). Така те извличат задълбочена информация за времевата структура на възвращаемостите, въз основа на която извеждат възможностите за прогнозиране на изследваните времеви редове.

Изброените доводи в горните два абзаца мотивират извършването на настоящото изследване. Целта на настоящата разработка, от една страна, е свързана с анализиране на измененията на цикличните компоненти на борсовия индекс S&P500 във времето, както и на претърпените срибо-

ве, тъй като появата на тези обстоятелства се свързва със значителни загуби за инвеститорите. От друга страна, получените резултати от изследването биха представили алтернативна гледна точка при анализирането на борсови крахове. Прилагането на анализ с вълнички (англ. *wavelets*) разкрива нови обстоятелства, касаещи времевата структура на измененията на възвращаемостите на борсовия индекс S&P500, както и структурните изменения, настъпили по време на въвеждането на електронната търговия в САЩ, на технологичния балон и на Голямата рецесия от 2007-2008 г. Това представлява основният принос на настоящата разработка.

Структурата на разработката е изградена както следва. Раздел 2, 3 и 4 представят по систематизиран начин основните теоретични положения при извършването на трансформация с вълнички. Освен това, литературният преглед ще послужи за мотивиране на избора за прилагане на конкретен вид трансформация и „вълничка“, а именно – непрекъсната трансформация посредством вълничката на Morlet. Раздел 5 и 6 обобщават и дискутират получените резултати.

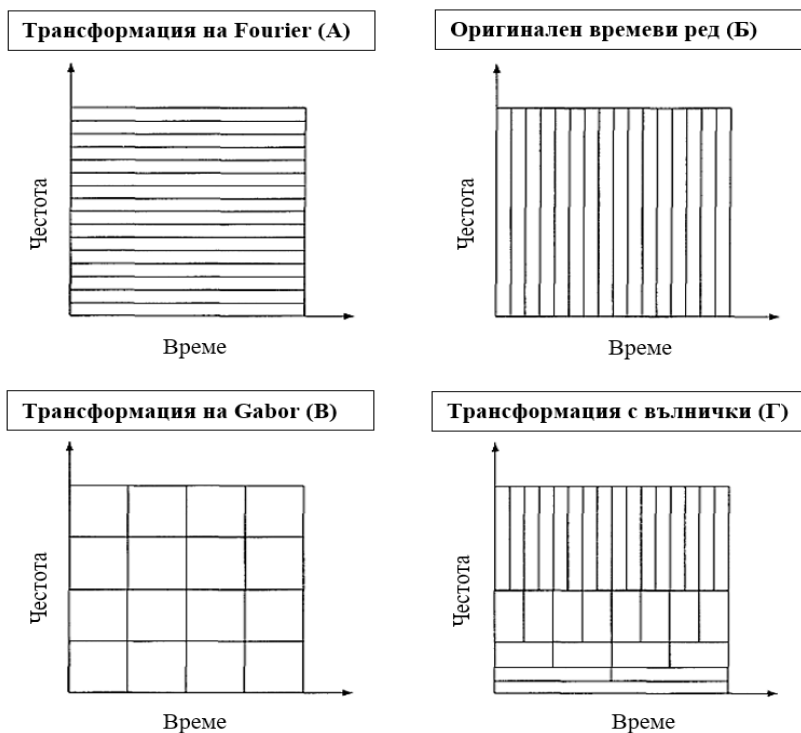
1. Основни положения в теорията на трансформацията с вълнички

Анализът с вълнички набира огромна популярност в академичните среди през последните 25 години основно в науките акустика, астрономия, инженерство, физика, медицина, геология, метеорология, океанология и в обработването на звукови и визуални сигнали. В този списък липсва икономиката и още повече финансите, тъй като икономистите предпочитат прилагането на традиционния иконометричен инструментариум въпреки съществуването на приложения на анализа с вълнички в икономиката. Така тези новаторски под-

ходи остават пренебрежнати от икономическата академична общност като цяло (Crowley, 2007, р. 207). Поради това, цел на настоящия труд е да изведе предимствата

на анализа с вълнички при изследването на финансови времеви редове.

Както беше дискутирано в увода на настоящата разработка, на финансовите пазари оперират едновременно множество



Фигура 1. Различни техники за разделяне на равнината време-честота

Източник: (Gençay, et al., 2002, р. 98)

инвеститори с различен инвестиционен хоризонт, поради което конкретната пазарна цена на даден финансов инструмент е резултат от съвкупните действия и решения на всички стопански субекти. Това обстоятелство определя сложната структура на финансовите времеви редове и обуславя необходимостта от прилагане на ново поколение изследователски инструменти, които да заместят традиционните аналитични иконометрични похвати в икономиката (Богданова, 2013, с. 20). Пригоднос-

та на трансформацията с вълнички произтича от нейната способност да раздробява структурата на даден времеви ред на по-прости фрагменти, съответстващи на различните честоти (времеви хоризонти). Това позволява много по-задълбочено разбиране на информацията, съдържаща се в агрегираните данни (Bogdanova, 2014, р. 3).

Според Gençay et al. (2002, р. 1), филтрирането на даден финансов времеви ред с помощта на вълнички дава възможност за извличане на допълнителен обем

информация, който би останал скрит при прилагане на конвенционални аналитични методи. Анализът с вълнички позволява отчитането на множество различни фактори, които на практика оказват влияние върху определен процес. Например, традиционните подходи изискват наличието на слаба стационарност, която в общия случай е валидна за борсовите пазари, но в определени моменти на практика се наблюдават и нестационарни събития като например трендове и шокове, проявяващи се в определен период от време. Анализът с вълнички допуска пренебрегването на предположението за стационарност. В допълнение, декомпозирането на даден процес, в зависимост от честотата чрез филтрирането с вълнички, позволява характеристиките на дадения процес (като сезонен ефект, повишена волатилност и структурни промени) да бъдат изследвани в различните времеви скали, като по този начин тяхното поведение може да бъде съвсем различно. Декомпозирането означава, че сложната функционална структура на реда се разбива на по-прости компоненти.

За да се подчертаят предимствата на трансформацията с вълнички при прилагането ѝ към даден финансов или икономически времеви ред, следва да се отговори на въпроса защо не се използват традиционните похвати в спектралния анализ като например трансформацията на Fourier. Анализът на Fourier използва като базисни функции синусоиди и косинусоиди, а трансформацията представлява линейна комбинация от тях. Важно е да се изтъкне, че използването на синусоиди и косинусоиди е изключително подходящо при анализирането на стационарни времеви редове. Освен това, синусоидите и косинусоидите са честотни функции. Но тъй като финансовите времеви редове се характеризират и с нестационарни събития, както беше коментирано по-горе, то трансформацията на Fourier не може да отчете подобни явле-

ния по ефикасен начин и ще ги пренебрегне. Това произтича от факта, че трансформацията на Fourier не запазва информацията във времето, т.е. липсва резолюцията във времето за сметка на наличието на пълната честотна резолюция. Така трансформацията на Fourier представя съдържащата се в оригиналния времеви ред информация като функция на честотата, но не и на времето. Това представлява основният недостатък на трансформацията на Fourier. Следователно, трансформацията на Fourier представя по противоположен начин оригиналния времеви ред, който е функция на времето и който не отчита честотата (Gençay, et al., 2002, p. 2). Фигура 1 онагледява представянето както на оригиналния времеви ред (панел А), така и на трансформацията на Fourier (панел Б) в равнината време-честота.

Трансформацията на Gabor, наричана още *кратковременна* (англ. *short-time*) трансформация на Fourier, цели преодоляване на описания по-горе недостатък, като въвежда прозорец, с помощта на който времевият ред се разделя на равни интервали. В рамките на всеки интервал се извършва трансформация на Fourier, за да се постигне баланс между време и честота (Gao & Yan, 2011, p. 21). Така равнината време-честота се разделя на правоъгълници, като размерът на прозореца е фиксиран в зависимост от честотата. Полученият резултат е функция на два параметъра – честота и времево отместване поради приплъзването на прозореца по протежение на времевия ред. Недостатъкът, който се проявява при този подход, е свързан с невъзможността за постигане на едновременно прецизност в честотен и времеви аспект. Панел В на фигура 1 онагледява трансформацията на Gabor (Gençay, et al., 2002, p. 99).

За да се преодолее проблемът с фиксирания размер на прозореца при трансформацията на Gabor, е необходимо въвеждането на нов клас от базови функции, наречени

Вълнички. Така трансформацията с вълнички премащабира и транслира базовата функция, за да улови онези характеристики, които са локални по време и честота. Панел Г на Фигура 1 онагледява начина, по който трансформацията с вълнички разделя равнината време-честота. Може да се види, че разделението е с по-голяма дължина във времето при отчитане на по-ниско-честотни събития. По този начин се получава добра честотна резолюция за тези събития. От друга страна, улавянето на по-високочестотни събития се свързва с по-голяма дължина по честотата, като се постига добра времева резолюция за тези събития (Gençay, et al., 2002, p. 99).

В обобщение може да се каже, че трансформацията с вълнички е функция на скалата, за разлика от трансформацията на Fourier и тази на Gabor, които са функции на честотата. Все пак скалата е свързана с честотата, като зависимостта е обратно пропорционална (скалата $\approx 1/\text{честотата}$). С помощта на *скалов параметър* (англ. *scale parameter*) – s , се осъществява преминаване от една скала (честота) в друга. Нарастването на този параметър предизвиква разтеглянето на базовата функция (вълничката) по времевата ос, свиване по отношение на честотната ос и изместване към по-ниските честоти. От друга страна, намаляването на скаловия параметър се свързва със свиване във времето, увеличаване на броя на уловените честоти и изместване към по-ниските честоти. Трансформацията с вълнички представлява изключително подходящ инструмент за изследване на нестационарни процеси във времевите редове (т.е. локални във времето/с временен характер). Панел Г на фигура 1 показва, че при по-високите честоти трансформацията с вълнички жертва част от честотната резолюция за сметка на възможността за улавяне на такива събития с временен характер (Gençay, et al., 2002, p. 100).

2. Клас от функции, наречен „вълнички“

Percival & Walden (2000, p. 2) дефинират понятието „вълничка“ като „малка вълна“, тъй като тя нараства и затихва в рамките на ограничен период от време. От друга страна, контрастното понятие за „голяма вълна“ може да бъде изразено математически чрез синусоида, която нараства и намалява по цялото протежение от $(-\infty; +\infty)$.

Вълничките са клас от функции, които са дефинирани в *пространствата на Бесов* (англ. Besov spaces) и които предоставят функционалната база, върху която се въвеждат нови функции в същото пространство. Всяка една функция-вълничка може да бъде индексирана във времето, тъй като е компактна. Така представянето на всяка една базисна функция на трансформацията с вълнички може да се извърши по следния начин (Ramsey, 2002, p. 5):

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} g\left(\frac{t-k}{s}\right), \quad s, k \in \mathbb{R}, s \neq 0$$

Означенията могат да бъдат дефинирани така:

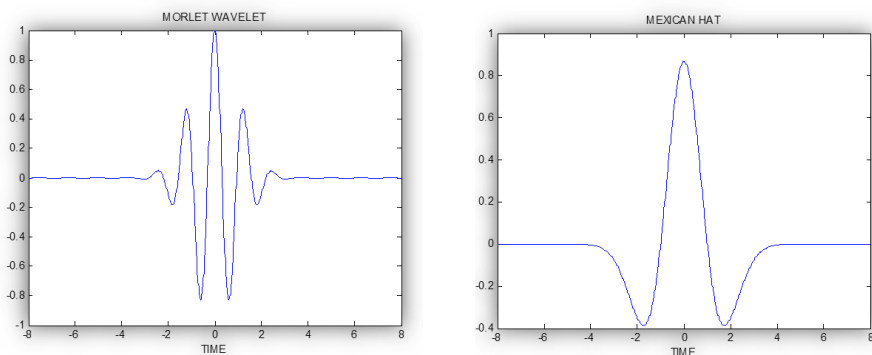
- t представлява времето;
- k като параметър представлява времевият индекс, т.е. разположението във времето;
- s като параметър изразява скалата (честотата), спрямо която $g(\cdot)$ бива оценявана.

По този начин се дефинират множество функции по оста на времето, които са индексирани както според разположението си във времето, така и според скалата. Важно е да се отбележи, че при анализа с вълнички скалирането се извършва в зависимост от времето, докато при анализа на Fourier – според честотата. За да се гарантира, че нормата на $g(\cdot)$ ще бъде винаги равна на единица, се извършва деление с $\sqrt{s}$. Така се постига сравнимост на всички трансфор-

мации с вълнички според времето и скалата (Rua & Nunes, 2009).

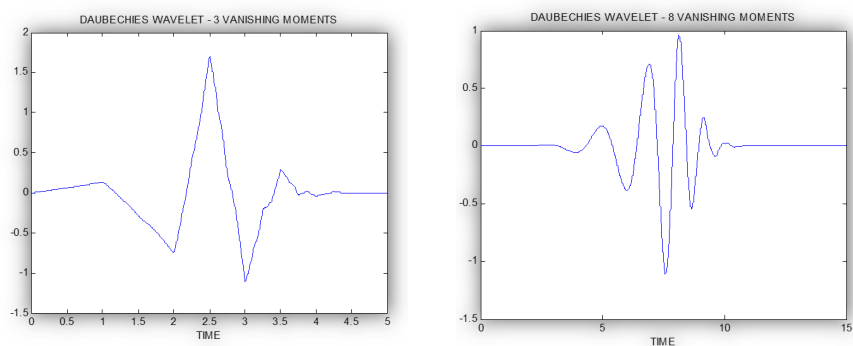
Базисните функции представляват из-

местени и скалирани разновидности на локализираната във времето вълничка „майка“ (англ. *mother wavelet*), която се бележи



Фигура 2. Често използвани вълнички при непрекъснатата трансформация

Източник: (Богданова, 2014, с. 53)



Фигура 3. Често използвани вълнички при дискретната трансформация

Източник: (Богданова, 2014, с. 53)

с $\psi(t)$. Така нейните гъщерни функции могат да бъдат представени със следния запис по еквивалент с базисните функции (Rua & Nunes, 2009):

$$\psi_{k,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-k}{s}\right)$$

Така гъщерните функции на вълничката „майка“ представляват нейни разновидности, които са транслирани с фактор k и премащабираны с фактор s . Параметърът k определя разположението на гъщерната

вълничка, а параметърът s задава нейната ширина. Вълничката „майка“, точно както и оригиналният времеви рег, е функция само на един параметър – времето t . За да може една функция $\psi(t) \in \mathbb{R}$ да бъде наречена вълничка „майка“, то тя трябва да изпълнява две условия. Първото е *условието за допустимост* (англ. *admissibility condition*), което представлява условие за затихване. Налагането му гарантира, че функцията ще бъде точно локализирана както в зависимост от времето, така и в зависимост от честота-

та. Тъй като вълничките са бързо затихващи функции, условието за допустимост придобива следния вид (Богданова, 2013, с. 22):

$$\Psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

Условие (3) изразява обстоятелството, че вълничката „майка“ проявява вълново държане около времевата ос (т.е. осцилира около нея), комбинирано с изискването за бързо затихване. Иначе казано, сумата от всички отклонения от нулата трябва да бъде равна на нула.

Второто условие изисква вълничката „майка“ да бъде интегрируема в квадрата си, т.е. $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ или (Percival & Walden, 2000, p. 2):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(t) dt = 1$$

За синусоидата това изискване няма как да бъде изпълнено, тъй като стойността на горния интеграл ще бъде безкрайна. Именно заради това синусоидата се счита за „голяма вълна“, въпреки че интегралът от нея по подобие на равенство (3) е равен на нула.

3. Трансформация с вълнички

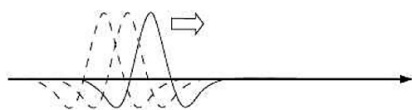
Разглеждам се два вида трансформация с вълнички – непрекъсната и дискретна. При непрекъснатата трансформация оригиналният времеви ред бива изразен като функция от две променливи – разположението във времето k и скалата s . По този начин се постига изключително задълбочен анализ на изследвания времеви ред, което е за сметка на големия брой излишна информация, получена чрез трансформацията. За да се преодолее това обстоятелство, се използва дискретната трансформация с вълнички. При нея се работи с подходящо направена извадка от стойностите на двата параметъра – k и s , така че да не се изгуби информация. Трансформацията се извършва върху внимателно подбраното под-множество от

всички стойности на двата параметъра. Предимствата на дискретната трансформация са свързани с простотата на метода, лесната му приложимост и изключително ниските изчислителни усилия. Всичко това прави дискретната трансформация популярен прием. Най-често срещаното му приложение е при обработването на звукови и визуални сигнали с цел тяхното компресиране (Aguirar-Contraria & Soares, 2011, p. 2).

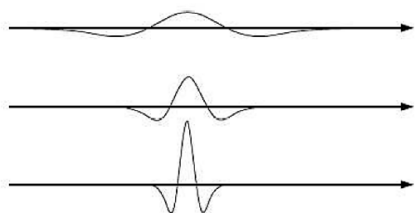
Както стана ясно в горния абзац, най-големият недостатък на непрекъснатата трансформация с вълнички е свързан със значителното време, необходимо за нейното изчисляване поради генерирането на множество ненужна информация. От друга страна, това обстоятелство може да бъде разглеждано и като предимство, тъй като според Aguirar-Contraria & Soares (2011, p. 2) излишната информация спомога за по-лесното интерпретиране на получените резултати в сравнение с дискретната трансформация с вълнички. Поради това, ако целта на изследването е да се анализират данни и да се разкрият зависимости и скрита информация, то непрекъснатата трансформация с вълнички е по-подходящият метод в сравнение с дискретната трансформация. Според Aguirar-Contraria & Soares (2011, p. 3), непрекъснатата трансформация с вълнички ще става все по-популярен метод сред икономистите, имайки предвид напредъка в изчислителните технологии и развитието на все по-усъвършенствани софтуерни продукти.

Друго предимство на непрекъснатата трансформация с вълнички, което Aguirar-Contraria & Soares (2011, p. 2) извеждат, е свързано с много по-голямата свобода на изследователите при избора на конкретна вълничка, която да бъде използвана. За разлика от това, при дискретната трансформация изборът на възможни вълнови функции е сравнително ограничен. Най-често използваната вълничка при непрекъснатата трансформация е вълничката на Morlet.

(А) Локация



(Б) Скала



скала

Текуща
скала
на ψ

(В) Трансформация с вълнички

Локално подобие на вълничката и времеви ред
води до големи стойности на детайлаТрансформация
с вълничкиТекущо разположение
на вълничката

разположение

Фигура 4. Представяне на процеса по (непрекъсната) трансформация с вълнички.

Източник: (van Berkel, 2010, p. 19)

Следващите два под-раздела разглеждат основните теоретични положения при извеждането съответно на непрекъснатата трансформация с вълнички и на дискретната. Преди това фигура 2 представя някои от най-често използваните вълнички при извършване на непрекъсната трансформация. Панел А омагледява вълничката на Morlet, а панел Б – вълничката, наречена „Мексиканска шапка“ (англ. *Mexican hat*) поради специфичната си форма. Вълничката на Morlet се използва за декомпозиция на даден времеви ред с цел локалното изследване на неговата честота, като тя е най-често използваната при икономически изследвания на база на непрекъсната трансформация. Наименованието „Morlet“ произтича от откривателя на вълничката, а именно – Jean Morlet. „Мексиканската шапка“ е симетрична вълничка, като тя се получава от втората производна на плътността на нормалното разпределение. В същото време, функцията, генерирана от нейната първа производна, представлява асиметрична вълничка. От друга

страна, фигура 3 представя вълничката на Daubechies, носеща името на своя откривател – Ingrid Daubechies. Тази вълничка дефинира дискретната трансформация. Панел А представя вълничката на Daubechies с 3 нулеви момента (англ. *vanishing moments*), а панел Б – с 8 нулеви момента (Богданова, 2014, с. 52).

3.1. Непрекъсната трансформация с вълнички

Нека отново разгледаме общия вид на всички гъщерни функции на вълничката „майка“, представен чрез равенство (2):

$$\psi_{k,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-k}{s}\right) \quad (2)$$

Процесът по скалирането на функцията означава нейното разтегляне, когато за скаловия параметър е изпълнено: $|s| > 1$. От друга страна, когато $|s| < 1$, вълничката бива свита (компресирана). Транслирането на функцията представлява измест-

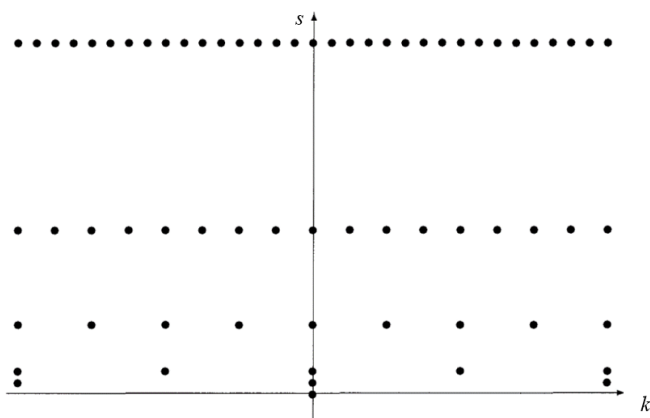
ването на нейната позиция във времето. Ако е даден времеви рег $\{x(t) \in L^2(\mathbb{R})\}$, непрекъснатата трансформация с вълнички по отношение на вълничката ψ представява функция на две променливи – k и s . Тя се получава чрез проекция на разглеждания времеви рег върху дъщерните функции на вълничката „майка“. Така функцията на непрекъснатата трансформация с вълнички, обозначена чрез $W_{x;\psi}(k, s)$, предоставя информация едновременно за времето и честотата. Тя придобива следния вид (Aguirar-Contraria & Soares, 2011, p. 7):

$$W_{x;\psi}(k, s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi^*\left(\frac{t-k}{s}\right) dt \quad (5)$$

Обозначението ψ^* изразява комплексно

спрегнатото. Въпреки сходствата помежду си, формулите на непрекъснатата трансформация с вълнички и на трансформацията на Fourier се различават по това, че тази на Fourier не разполага с трансляционен параметър k и че използва синусоидата и косинусоидата вместо функцията на вълничката (Aguirar-Contraria & Soares, 2011, p. 8). С цел улесняване на представянето на непрекъснатата трансформация с вълнички, оттук насетне $W_{x;\psi}(k, s)$ ще бъде обозначавана съкратено чрез W_x .

Трансформацията с вълнички преобразува оригиналния едномерен времеви рег в двумерна функция, зависеща от местоположението във времето – k , и скалата



Фигура 5. Критична извадка на равнината време-честота чрез „дискретизация“ на параметрите на непрекъснатата трансформация с вълнички според равенство (9)

Източник: (Gepçay, et al., 2002, p. 105)

– s . Идеята е, че формата на конкретно избраната вълничка бива сравнявана с формата на разглеждания времеви рег, за да се установи дали определени части от времеви рег съвпадат с вълничката. Процесът по сравняване се извършва не само за различни разположения във времето, но и за различните скали. Целта е да се извлече полезна информация за времеви рег, който би останала скрита при прилагане на

традиционния иконометричен анализ. Трансформацията с вълнички е изключително полезна, тъй като изследва времеви рег в зависимост от различни честоти и локации във времето. Това нейно свойство се нарича мултирезолуция (англ. multiresolution) (van Berkel, 2010, p. 18).

Фигура 4 онагледява процеса по трансформация с вълнички на даден времеви рег. Панел А представя транслирането на въл-

ничката по оста на времето, предизвикано от параметъра k . Панел Б разглежда скалирането на вълничката (нейното разтегляне и свиване), произтичащо от размера на честотния параметър s . Панел В изразява процеса по сравняване на вълничката с локалните форми на разглеждания времеви рег, при което се стига до трансформация и получаване на коефициент, наречен детайл (англ. detail). Неговата стойност ще бъде толкова по-голяма, колкото по-голямо е сходството между конкретната вълничка $\psi_{k,s}(t)$ и разглеждания времеви рег $x(t)$.

Както стана ясно от дискусията по-горе, вълничката на Morlet е най-широко разпространената при извършване на непрекъснатата трансформация. Нейната функция има следния вид (Gençay, et al., 2002, p. 102):

$$\psi^M(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega_0 t} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (6)$$

където i е имагинерно число $\{i = \sqrt{-1}\}$, а ω_0 представлява централната честота (англ. central frequency) на вълничката. От равенство (6) следва, че вълничката на Morlet заема комплексни стойности, което е от изключителна важност при някои от приложенията на непрекъснатата трансформация. В същото време, функцията на „Мексиканската шапка“ като симетрична вълничка представлява втората производна на плътността на нормалното разпределение:

$$\psi^{Mh}(t) = \frac{2}{\pi^{1/4} \sqrt{3\sigma}} \left(1 - \frac{t^2}{\sigma^2}\right) e^{-t^2/2\sigma^2} \quad (7)$$

Първата производна на плътността на нормалното разпределение задава асиметрична вълничка, чиято функция е представена в равенство (8). Всички три описани вълнички са подходящ инструмент за извършване на непрекъснатата трансформация, тъй като техните функции са непрекъснати.

$$\psi^G(t) = \frac{\sqrt{2}t}{\sigma^{3/2} \pi^{1/4}} e^{-t^2/2\sigma^2} \quad (8)$$

3.2. Дискретна трансформация с вълнички

Както беше коментирано в предходния раздел и изразено чрез равенство (5), непрекъснатата трансформация с вълнички е функция на два параметъра – k и s . Така при разлагането на сложната структура на функцията на разглеждания времеви рег на по-прости компоненти се генерира голямо количество излишна информация. За да се избегне това обстоятелство, може да се използва подходящо направена извадка от двата параметъра. При това, обаче, трябва да се гарантира запазването на необходимата информация, което може да се постигне чрез извършването на т.нар. „критична извадка“ (англ. „critical sampling“), според която:

$$s = 2^j \text{ и } k = l2^j, \quad (9)$$

където j и l са цели числа, представящи множествата от дискретните трансляции и скалирования. Така дискретната трансформация представлява една извадка от получените чрез непрекъснатата трансформация коефициенти, като важната информация за времевия рег не се изгубва (Богданова, 2013, с. 22). Изискването за критична извадка задава минималния брой коефициенти, които трябва да бъдат включени в извадката. Дискретната трансформация с вълнички обхваща ограничен брой скали, за всяка от които се разглеждат различен брой коефициенти. Важно е да се отбележи, че дискретната трансформация може да бъде изведена и без позоваване на непрекъснатата. Фигура 5 представя равнината време-честота, като двете оси изразяват двата параметъра – k и s . Получените стойности при непрекъснатата трансформация могат да бъдат представени чрез всяка една от точките в равнината. За разлика от това, дискретната трансформация заема стойности, изразени от ограничен брой точки в равнината, които

са онагледени от фигура 5 (Gençay, et al., 2002, p. 105).

Разглеждайки равенство (9), може да се каже, че при увеличаване на скалата s (произтичащо от увеличаване на j) се наблюдава двукратно нарастване на броя на коефициентите, които попадат в изважката. Така тези коефициенти сформират ортогонал-

на база. Когато скалата и разположението във времето са зададени както в равенство (10), тогава се получава т.нар. *дискретна трансформация с максимално припокриване* (англ. *maximal overlap discrete wavelet transformation*) (Gençay, et al., 2002, p. 106). Тя се счита за компромисен вариант между непрекъснатата и дискретната трансфор-

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-1,9231...	3,2538e...	-5,2617...	7,3357e...	-8,4759...	8,2878e...	-7,2653...	5,908
2	-2,5227...	4,2571e...	-6,8518...	9,5177e...	-1,0989...	1,0763e...	-9,4481...	7,682
3	-3,3023...	5,5645e...	-8,9228...	1,2356e...	-1,4258...	1,3985e...	-1,2292...	9,993
4	-4,3115...	7,2634e...	-1,1616...	1,6046e...	-1,8509...	1,8178e...	-1,5992...	1,299
5	-5,6113...	9,4635e...	-1,5110...	2,0836e...	-2,4027...	2,3626e...	-2,0800...	1,689
6	-7,2751...	1,2301e...	-1,9632...	2,7040e...	-3,1182...	3,0692e...	-2,7034...	2,194
7	-9,3893...	1,5943e...	-2,5464...	1,5058e...	-4,0435...	3,9834e...	-3,5094e...	2,845
8	-1,2053...	2,0589e...	-3,2955...	4,5386e...	-5,2369...	5,1628e...	-4,5482...	3,682
9	-1,5374...	2,6476e...	-4,2532...	5,8643e...	-6,7709...	6,6789e...	-5,8818...	4,754
10	-1,9465...	3,3877e...	-5,4707...	7,5580e...	-8,7345...	8,6196e...	-7,5857...	6,118
11	-0,0002...	0,0004...	-0,0007...	9,7109e...	-0,0011...	0,0011...	-9,7509...	7,844
12	-0,0003...	0,0005...	-0,0009...	0,0012...	-0,0014...	0,0014...	-0,0012...	0,001

Фигура 6. Част от матрицата WX , изчислена за месечните логаритмични възвръщаемости на борсовия индекс S&P 500

мация, тъй като тя не генерира чак толкова много излишна информация колкото се наблюдава при непрекъснатия метод поради ефективно представяне на скалата s . От друга страна, обаче, дискретната трансформация с максимално припокриване не проявява никаква избирателност спрямо параметъра k , което води до получаване на излишна информация (Aguirar-Conraria & Soares, 2011).

$$s = 2^j \text{ и } k = l \quad (10)$$

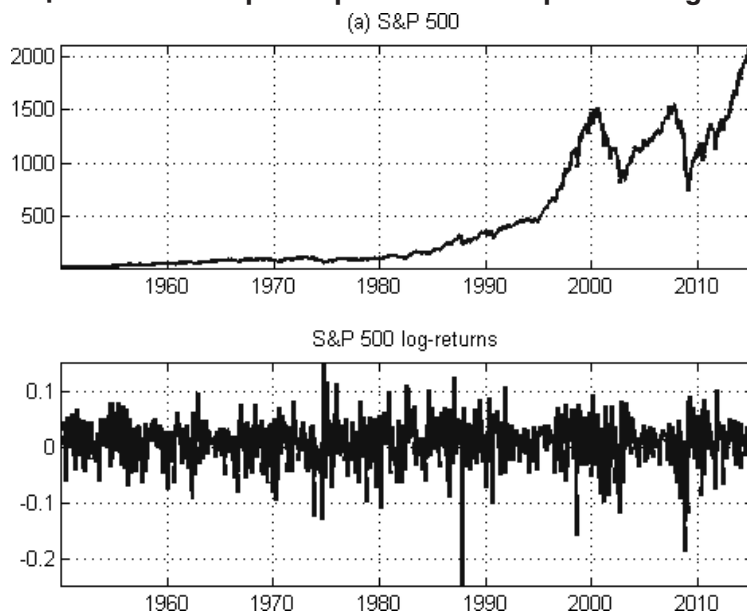
Освен това, факторът j бива наречен

октава, докато факторът 2^j представлява скалата. Когато октавата заеме положителни стойности, се стига до разтегляне на вълничката, а при отрицателни стойности – до нейното свиване (Ломев, et al., 2010). По този начин може да бъде представен общият вид на дъщерните функции на вълничката „майка“ при изпълнение на равенство (9) (Богданова, 2013, с. 22):

$$\psi_{j,l}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - l) \quad (11)$$

Така дискретната трансформация с вълнички на даден времеви рег $\{x(t), t \in \mathbb{R}\}$

5. Анализ на цикличните характеристики на борсовия индекс S&P 500



Фигура 7. В панел (а) е представена графиката на месечните цени при затваряне на S&P 500 за периода януари 1950 – март 2015 г., а в панел (б) е представена графика на съответните им логаритмични възвръщаемости

може да бъде представена както следва (Ломев, et al., 2010):

$$W_{j,l} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{j,l}(t) dt, \quad (12)$$

където $W_{j,l}$ представляват получените от дискретната трансформация коефициенти и се наричат детайли. В практиката дискретната трансформация с вълнички се извършва посредством прилагането на процедура, наречена пирамиден алгоритъм. Той се базира на теорията на мулти-резолюционния анализ.

4. Едномерен анализ

Целта на този раздел е да илюстрира възможностите за едномерен анализ, които предлага непрекъснатата трансформация с вълнички (НТВ). Подобно на трансформацията на Furie, НТВ може да бъде използвана за идентифициране на цикличността, с която се характеризира даден

времеви ред. Формула (5) по-горе дефинира НТВ на даден времеви ред $x(t)$. Трябва да се отбележи, че е използвано формалното означение $\{x(t)\}$, вместо $\{Xt\}$, тъй като непрекъснатата и смесената трансформация с вълнички чисто теоретично се дефинира за непрекъснатата, а не за дискретна функция. Практически са развити техники, с чиято помощ трансформацията се прилага за времеви редове. Освен за едномерен анализ, трансформацията с вълнички е подходящ инструмент и при изследването на зависимости между два времеви реда $x(t)$ и $y(t)$. За целта е необходимо да се въведе смесената ТВ:

$$W_{xy} = W_x W_y^* \quad (13)$$

Както беше дискутирано по-горе, при изпълнението на формула (5) се прилага набор от дъщерни функции $\left\{ \psi_{k,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-k}{s}\right); s, \tau \in \mathbb{R}, s \neq 0 \right\}$,

Таблица 1. Описателни статистики на използваните данни. Под докладваните стойности на χ^2 -статистиката на Jarque-Bera и t – статистиката на Dickey-Fuller в скоби са представени съответните вероятности за допускане на грешка от първи род

	Цена при затваряне	Логаритмични възвръщаемости
Брой наблюдения	783	782
Средна стойност	466,6602	0,0061
Стандартно отклонение	535,0271	0,0418
Коефициент на асиметрия	1,1040	-0,6661
Коефициент на височинност	2,8864	5,4562
Jarque-Bera	159,4661	254,4018
	(0,0010)	(0,0010)
Dickey-Fuller	3,1634	-26,0895
	(0,9990)	(0,0010)

които зависят от два параметъра – s и τ . Скаловият параметър s служи за премащане на вълничката майка. В зависимост от стойностите, които заема s , получаваме „свита“ или „разтеглена“ версия на вълничката майка. Чрез разтегляне на базовата вълничка се улавят компоненти с различна честота. При приложение на вълничката на Morlet преминаването от скала към честота (респективно към период) става лесно. От друга страна, параметърът τ служи за проследяване на динамичните характеристики на изследвания времеви ред.

Теоретично $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$ и $\tau \in \mathbb{R}$. За практическото реализиране на НТВ се дефинира фина мрежа от стойности за s и τ . Най-често τ съвпада с времевия вектор t . Например, ако анализираме данни с годишна честота за периода 1980-2010 г., то:

$$\{t = (t_1 \dots t_{30})^T, t_1 = 1980, t_2 = 1981, \dots, t_{30} = 2010\},$$

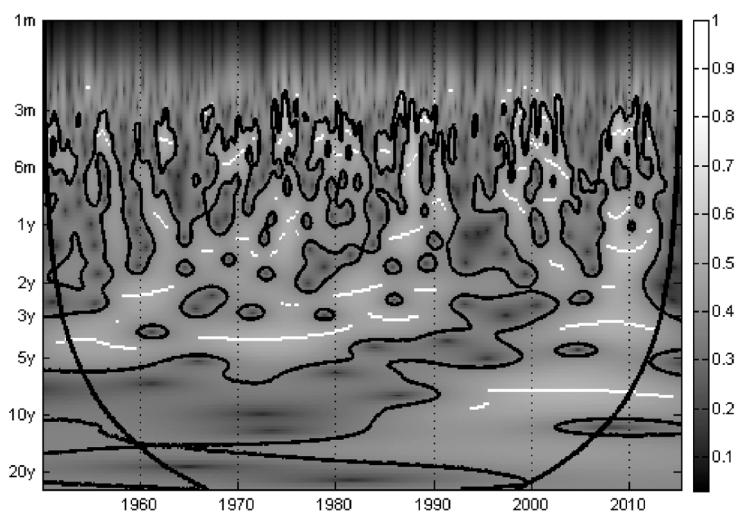
а ако данните за същия период са със седмична честота, то:

$$\{t = (t_1 \dots t_{1560})^T, t_1 = 1980, t_2 = 1980 + \frac{1}{52}, \dots, t_{1560} = 2010\}.$$

Изборът на стойности на s обикновено се прави въз основа на целите на анализатора. Например, ако ни интересува с какви периодични компоненти се характеризира даден времеви ред в диапазона 1-10 години, то тогава $s_1 \leq s \leq s_2$, като скалата s_1 заема стойност, съответстваща на едногодишен период, а s_2 заема стойност, съответстваща на 10-годишен период. Полученият резултат W_x представлява матрица, чиито редове съответстват на стойностите на s , а стълбовете τ – на τ .

На Фигура 6 е показана част от матрицата W_x на месечните логаритмични възвръщаемости на борсовия индекс S&P500 за периода януари 1950 г. – март 2015 г. Изборът на s и τ е както следва:

- Най-фината скала s_1 съответства на период с дължина 1 месец ($p_1 = \frac{1}{12}$);
- Най-голямата скала s_2 съответства на период с дължина 25 години ($p_2 = 25$);
- s (като $s_1 \leq s \leq s_2$) заема общо 206 стойности, следователно W_x има 206 реда;
- $\tau \equiv t$, като $\{t = (t_1 \dots t_{782})^T, t_1 = 1950, t_2 = 1950 + \frac{1}{12}, \dots, t_{782} =$



Фигура 8. ТВ спектър на логаритмичните възвръщаемости на S&P 500

$2015 + \frac{2}{12}$ }, следователно W_x има 782 стълба.

На фигура 7 (а) е представена графика на месечните цени при затваряне на индекса S&P 500 за периода януари 1950 г. – март 2015 г. Данните са взети от сайта <http://finance.yahoo.com/>. Към тях е приложена рутинната за борсови данни трансформация в логаритмични възвръщаемости.

В Таблица 1 са представени описателните статистики както на необработените данни (цени при затваряне на пазара), така и на съответните им логаритмични възвръщаемости. Съгласно тестът на Дики-Фулър, времевият ред от цените при затваряне на пазара е нестационарен, докато редът от логаритмични възвръщаемости е се характеризира със стационарност. Друга характеристика, поради която се спираме върху реда от логаритмични възвръщаемости за провеждане на анализа, е значително намаление в абсолютната стойност на коефициента на асиметрия спрямо тази на реда от цени при затваряне на пазара.

От фигура 7 (а) може да се забележи,

че структурата на данните е претърпяла съществени промени през анализирания период от време, като веднага се забелязват „дом-ком“ балона и ипотечната криза от 2007-2008 г. Редица автори смятат, че след въвеждането на електронната търговия структурата на финансовите данни се усложнява значително. Ще проверим тази хипотеза с помощта на НТВ.

На фигура 8 е представена мощността на вълновия спектър на реда от логаритмични възвръщаемости на индекса S&P500. Оста x на тази фигура съответства на времевата скала (от началото до края на изследвания период), а оста y – на честотната. С цел улеснение на интерпретацията на получените резултати, честотите са превърнати в периоди на месечна или годишна база (напр. 1m съответства на период с продължителност 1 месеца, а 1y – на период с продължителност 1 година). Всеки пиксел от тази карта представлява оценения спектър в даден времеви момент на определена честота. Подобно на географска карта, стойността му съответна на всяка точка от равнината е указана с определен цвят, като възприетият цвят

ког е представен в ясно от картата. Статистическата значимост на визуализираните с цвят коефициенти е определена чрез експерименти Монте Карло. Областите със статистически значими коефициенти са очертани с черен контур. В допълнение, на фигурата е очертан и така наречения конус на влияние, като коефициентите, лежащи извън него, следва да се интерпретират с повишено внимание, тъй като за изчислението на трансформацията в краищата на времевия интервал е необходимо удължаването на редовете от наблюдения чрез екстраполация. За да може лесно да се идентифицира дължината на периода на наблюдаваните циклични характеристики, локалният максимум на вълновия спектър е означен с плътна бяла линия.

Въз основа на фигура 8 могат да бъдат направени следните коментари. Общото за целия изследван период е, че се наблюдават множество локални максимуми, съответни на периоди с дължина под 1 година. Тези краткотрайни цикли са характерни за финансовите пазари и отразяват спецификите на волатилността на този вид данни. Също може да се забележи, че до началото на 90-те години на XX в. е налице ясно изразена цикличност с период в диапазона 2-5 години. По същество това е дължината, с която се характеризира бизнес-цикълът. Този резултат предполага, че преди въвеждането на електронната търговия, борсовите данни са отразявали бизнес-динамиката.

Изключително интересен е периодът от 1990 до 2000 г., през който отсъства характерната до преди това цикличност от 2-5 години. От средата на 90-те, обаче, се забелязва появата на нова циклична компонента с приблизително 7-годишна периодичност, която продължава до края на изследвания период. След 2002 г. се появява отново максимум на характерната за бизнес-цикъла честота, а след 2007 г. се наблюдава още един максимум, съответен

на период с дължина 1-2 години. Може да се види, че на картата има още един максимум на тази честота и той е в края на 80-те години, когато е настъпил борсовият срив, наречен „Черният понеделник“.

Можем да обобщим, че времевата структура на финансовите данни се променя през целия изследван период, като през последните 10 години се забелязва значително усложняване, характеризиращо се с появата на нови циклични компоненти.

Заклучение

Резултатите от настоящото изследване показват, че за периода януари 1950 г. – март 2015 г. редът от възвръщаемости на борсовия индекс S&P500 е стационарен. Времево-честотната структура е претърпяла сериозни изменения с течение на времето. Обща черта през целия изследван 65-годишен период е наличието на краткосрочни циклични компоненти (краткосрочни инвеститори). Избухването на борсови крахове като технологичният балон и Голямата рецесия от 2007-2008 г. и тяхното въздействие върху капиталовия пазар също е онагледено чрез трансформацията с вълнички. Навлизането на електронната търговия на американските борсови пазари усложнява значително времевата структура на изследвания финансов ред.

Цитирани източници:

Богданова, Б., 2013. *Анализ на степента на перфектност на осем регулирани пазара за сделки с ценни книжа от Югоизточна Европа посредством дискретна трансформация с вълнички*. София, Софийски Университет “Св. Климент Охридски”, с. 58-95.

(Bogdanova, B., 2013. *Analiz na stepenta na perfektnost na osem regulirani pazara za sdelki s tsenni knizha ot Yugoiztochna Evropa posredstvom diskretna transformatsiya s valnichki*. So-

fia, Sofiyski Universitet "Sv. Kliment Ohridski", s. 58-95)

Богданова, Б., 2014. *Перфектност и интеграция на фондовите пазари от Югоизточна Европа – анализ чрез трансформация с вълнички*. Защитен дисертационен труд за присъждане на ОКС „Доктор“. София.

(Bogdanova, B., 2014. *Perfektnost i integratsiya na fondovite pazari ot Yugoiztochna Evropa – analiz chrez transformatsiya s valnichki*. Zashtiten disertatsionen trud za prisazhdane na OKS "Doktor". Sofia)

Ломев, Б., Иванов, И. & Богданова, Б., 2010. Изследване на перфектността на възникващи фондови пазари от Източноевропейския регион посредством дискретна трансформация с вълнички. *Научни трудове на Русенския университет*, 49(5.1), с. 194-198.

(Lomev, B., Ivanov, I. & Bogdanova, B., 2010. Izsledvane na perfektnostta na vaznikvashti fondovi pazari ot iztochnoevropeyskiya region posredstvom diskretna transformatsiya s valnichki. *Nauchni trudove na Rusenskiya universitet*, 49(5.1), s. 194-198)

Aguirar-Conraria, L. & Soares, M., 2011. The continuous wavelet transform: a primer. *NIPE Working Papers from NIPE – Universidade do Minho, WP 16/2011*.

Bogdanova, B., 2014. *Integration of the Bulgarian stock market in the world financial markets: a wavelet point of view*. Sofia, Sofia University "St. Kliment Ohridski", pp. 7-14.

Bogdanova, B. & Ivanov, I., 2016. A wavelet-based approach to the analysis and modelling of financial time series exhibiting strong long-range dependence: the case of Southeast Eu-

rope. *Journal of Applied Statistics*, 43(4), pp. 655-673.

Chabot, B., Ghysels, E. & Jagannathan, R., 2014. Momentum Trading, Return Chasing, and Predictable Crashes. Issue WP 2014-27.

Crowley, P. M., 2007. A guide to wavelets for economists. *Journal of Economic Surveys*, 21(2), pp. 207-267.

Daniel, K. & Moskowitz, T. J., 2016. Momentum crashes. *Journal of Financial Economics*, 122(2), pp. 221-247.

Gao, R. X. & Yan, R., 2011. *Wavelets: Theory and Applications for Manufacturing*. New York: Springer US.

Gençay, R., Selçuk, F. & Whitcher, B., 2002. *An introduction to wavelets and other filtering methods in finance and economics*. San Diego: Academic Press.

Percival, D. B. & Walden, A. T., 2000. *Wavelet Methods for Time Series Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.

Ramsey, J. B., 2002. Wavelets in Economics and Finance: Past and Future. *Studies in Non-linear Dynamics & Econometrics*, 6(3), pp. 1-29.

Rua, A. & Nunes, L., 2009. International comovement of stock market returns: a wavelet analysis. *Banco de Portugal, Economics and Research Department - Working Papers*.

van Berkel, M., 2010. *Wavelets for Feature Detection; Theoretical background*, Eindhoven: Eindhoven University of Technology.