

Анализ на българския финансов пазар, посредством приложението на фракталната геометрия

Петър Рангелов*

Резюме: Изследването представя и обобщава в кондензиран порядък базовите постулати и концепции, произтичащи от принципите и идеите на фракталната геометрия, приложени в областта на поведението и динамиката на финансовите пазари. Направен е сравнителен анализ между класическите финансово-статистически показатели за измерване и обобщаване на определено състояние на финансовата система, от една страна и основните количествени параметри, произтичащи от фракталния анализ, от друга. В последната част е направен анализ и тест за фракталност на българския финансов пазар и по-специално, в детайли е анализиран основният борсов индекс – SOFIX.

Ключови думи: фрактален процес, фрактално измерение, експонента на Хърст.

JEL: C46, C58, G11.

1. Въведение

Между 70-те и 80-те години на 20-и век полско-френският математик и учен Беноа Манделброт поставя и формулира основите на така наречената

фрактална геометрия, която е разновидност на класическата Евклидова геометрия, използвана широко в архитектурата и инженерните науки, и на геометрията на Боляй-Лобачевски, използвана във физиката. Първоначално фракталната геометрия се използва за описание и анализ на геометричните форми и свойства на природните обекти, които към онзи момент не са били в обхвата на класическата Евклидова геометрия, но на практика съставляват по-голяма част от формите и обектите на заобикалящата ни действителност. С течение на времето основните концепции на фракталната геометрия биват систематизирани и прилагани в други области на науката. Фракталната геометрия е в основата на теорията на хаоса, както и влиза в помощ още в анализа и прогнозирането на времето, мозъчните вълни, земетресенията, интернет трафика, компресирането на файлове, разпределението на галактиките и природни залежи, както и в редица други области.

Приложението на фракталния анализ във финансите се изразява в конструирането на систематизиран подход за моделиране на цените на финансовите и реални активи. Този алтернативен подход

* Петър Рангелов е заочен докторант в катедра „Финанси“ на УНСС.

се базира на създаването на фрактален процес, генериращ вероятно разпределение с дебели опашки. Самото съставяне на такъв процес се базира на идеята за скалиращата неизменност (*scaling invariance*), дефинирана от Mandelbrot (1997), **която гласи, че формата на вероятностното разпределение на възвръщаемостта на активите е инвариантна (неизменна) спрямо промяната на времевата скала (мащаб)**. Друга основна характеристика на фракталния процес е включването на параметър, определящ относителния магнитуд на последователността на случването на определени събития от миналото, които отдават своята тежест върху поведението и динамиката на явлението в настоящето и бъдещето. Тази характеристика се моделира чрез т.нар. параметър на Хърст.

Обичайните математически инструменти, използвани за анализ на сложни системи, било то чисто природни или системи, в които участват човешки индивиди, се оказва, че имат слабости. Те постигат относително добри приближения (*approximation*) на резултата при добре държачи се процеси, но се провалят в точното описание на изследваните процеси при асиметричност и нелинейност. Такива динамични характеристики се наблюдават при социално-икономическите системи и в частност при финансовите пазари. Фракталният и мултифракталният анализ обясняват някои от важните наблюдаеми статистически феномени на финансовите пазари, които класическият аналитичен инструментариум не успява да опише с необходимото ниво на прецизност. Поради тази причина **главната цел** на настоящата разработка се състои

в представянето на основните идеи на фракталния анализ, като в случая се търси интуитивното разбиране и представяне на концепциите, а не толкова тяхното математическо и статистическо излагане.

1.1. Цели

Преследваните цели в разработката се изразяват в следното:

- Кратка характеристика на основните количествени и статистически емпирично наблюдаеми феномени;
- Представяне и дефиниции на основните принципи, свързани с фракталния анализ;
- Излагане на някои от основните фрактални модели, цитирани в научната литература и
- Тестване за фракталност на българския финансов пазар посредством анализ на основния български борсов индекс – SOFIX.

1.2. Структура

В началото правя кратък преглед на основните статистически феномени, наблюдавани на финансовите пазари, като тук трябва да се отбележи, че те варират в зависимост от разглеждания актив. Естествената последица, породена от разрыва между наблюдаваната динамика на цените и възвръщаемостите на активите, от една страна и аналитичния инструментариум за обяснение и прогнозиране на същите, от друга, довежда до възникването и имплементирането на нови математически и статистически концепции в арсенала на анализаторите и изследователите, с които се цели по-прецизно пресъздаване

Управление на ресурси и разходи

на поведението на финансовите пазари. Именно на тази база се интегрира и концепцията, на пръв поглед толкова чужда за финансите – фракталната геометрия. Направен е относително хронологичен преглед и представяне на идеите, заложен в фракталния анализ, като започвам с дефиницията на фрактален процес, впоследствие представям и основните използвани фрактални модели. В заключение концепциите и количественият аналитичен апарат, произтичащ от фракталната геометрия, са приложени за дескриптивен анализ на рисковата структура на основния борсов индекс, котиран на БФБ – SOFIX.

2. Емпирични данни

Стремешът на тази част от изследването е насочен да представи основните статистически характеристики и феномени, които се проявяват на различните пазари с цел извеждането на закономерности, които са неизменни спрямо

времето и различните типове търгувани активи.

Една от основополагащите концепции при математическото моделиране на поведението на цените, респективно възвръщаемостта от инвестициите във финансови и реални активи се извършва на база допускането, че миналите стойности на изследвания актив не оказват влияние върху сегашната или бъдещата му стойност. Такова допускане се изгражда на база теоретична рамка, позната в класическите финанси като **теорията на ефективните пазари** – виж Fama (1970). В литературата съществуват и алтернативни теоретични конструкции, целящи да опишат фундаменталните движещи сили, формиращи цените на активите и поведението на пазарните участници. Струва си да се споменат **теорията за адаптивните пазари**, разработена и систематизирана от Lo (2019), и **хипотезата за фракталните пазари**, предложена от Peters (1994).

Таблица 1. Допускания (често нереалистични), представени в обобщен вид

Класическа финансова теория - допускания	Коментар
Ефективни пазари (Марковски процес)	<ul style="list-style-type: none">• За определянето на бъдещата стойност на дадена променлива е от значение единствено и само настоящата ѝ стойност. Кореспондира със "слабата теория за ефективните пазари".• Липса на арбитражни възможности.
Мартингалност (Martingale)	<ul style="list-style-type: none">• Концепцията за честна игра, цялата информация е известна на всички пазарни агенти и никой не е в неравнопоставено положение.
Правило на Крамър	<ul style="list-style-type: none">• Загубите са по-вероятни да дойдат от натрупване на множество събития, а не от едно единствено (outlier).
„Нормалност“ и симетричност на честотното вероятностно разпределение на цените и техните възвръщаемости	<ul style="list-style-type: none">• Липса на екстремални стойности в данните, лесно извеждане (и наличие) на централни моменти.
Рационално поведение на пазарните участници	<ul style="list-style-type: none">• Стремеш към максимална печалба.• Максимизиране на съотношението възвръщаемост-риск.

В класическите количествени финанси са заложен и редица други често нереалистични допускания, които са представени в обобщен вид в таблица 1.

Основните типове подходи за описание на тенденции, закономерности и поведение на цените на различните видове активи условно може да се разделят в две големи групи: 1) такива, които обясняват даден процес с цел получаване на разбиране за **източниците и взаимовръзките**, определящи и движещи цената на актива; и 2) прогностични модели с цел **предсказване** на стойностите на явленията в определен бъдещ момент. Mandelbrot (2008) твърди, че цените на финансовите активи не могат да бъдат предсказани по какъвто и да било полезен и продуктивен начин, но рискът притежава структура, която може да бъде описана математически. Именно поради тази причина втората група модели (прогностичните) в повечето случаи не възпроизвеждат дадена точкова оценка на цената или респективно възвръщаемостта, а се стремят да имитират реалния динамичен процес, характеризиращ определената вероятно-претеглена траектория на явленията.

Въпреки усилията на изследователите и практиците в устрема им да конструират възможно най-точно описващ реалната действителност количествен модел, всички до момента методи успяват в най-добрия случай да апроксимират базовите процеси и зависимости. Въпреки това, поведението на финансовите пазари се характеризира с определен набор от повтарящи се закономерности, чийто произход остава не напълно доказан. Следователно, стремежът към извличането на причинно-следственост,

реконструираща определено следствие, е почти невъзможна задача, имайки предвид, че в по-голямата част от случаите анализаторите разполагат с ограничен достъп до информация. Основните емпирично наблюдаеми статистически характеристики, типични за повечето търгувани активи, може да се обобщят, синтезират и представят по следния начин:

➤ **Автокорелация на възвръщаемостите;**

В голямата си част изследванията са насочени в намирането на доказателства за наличието на краткотрайна зависимост (автокорелация) между текущата цена и нейните случили се реализации. Краткотрайната зависимост се изразява в това, че изменението на цената в даден момент влияе върху изменението на цената в близък бъдещ момент – било то час, дни или месеци. Интуитивно, такъв феномен може да се обясни на база това, че например ако пазарът получи положителна информация за дадена компания, то нейната цена първоначално ще се покачи и ще запази този тренд за времето, в което тази положителна информация се асимилира от всички пазарни субекти. На практика това означава, че щом дадена цена започне да се покачва, то вероятността това покачване да остане в кратък период от време е по-голяма отколкото цената да тръгне надолу. Противоположна тенденция се наблюдава в динамиката на цените в средносрочен период от време, между три и осем години. Fama и French (1988) показват, че ако дадена компания има възходящ тренд в продължение на няколко години, то вероятността този тренд да не продължи, а да се обърне е по-висока спрямо обратната ситуация.

Управление на ресурси и разходи

- **Наличие на концентрация (клъстери-зация) на волатилността в значително компресирани времеви моменти;**

Друга отличителна характеристика на данните за цените на финансовите активи се изразява в наблюдаването на компресиране на активността на пазарните субекти в относително компактни времеви моменти, което като последица води до натрупване на вариацията в зона на клъстери. Този феномен може да бъде обяснен и посредством технологията и микроструктурата на различните борсови пазари, към която има отношение и следващият наблюдаем феномен, а именно дискретното проявление на траекториите на ценовите движения.

- **Наблюдяване на прекъснато/дискретно (*discontinues*) поведение на цените;**

Чисто математически боравенето с „добре държачи“ се функции, репрезентирани динамичния ред на цените на финансовите активи, основно е свързано с по-лесната техническа обработка на същите и свеждане до разумни граници на сложността от тяхното прилагане. Под „добре държачи“ се функции се има предвид главно функции, които са непрекъснати (*continues*) в своята траектория. Търговията на финансовите пазари се различава в няколко важни направления и по-конкретно – ценовата динамика, като функция от времето не следва „астрономическото“ време, а периода на търговия, в който световните борси функционират. Иначе казано, проявлението на резки дискретни движения е в голямата си степен резултат именно от разрива,

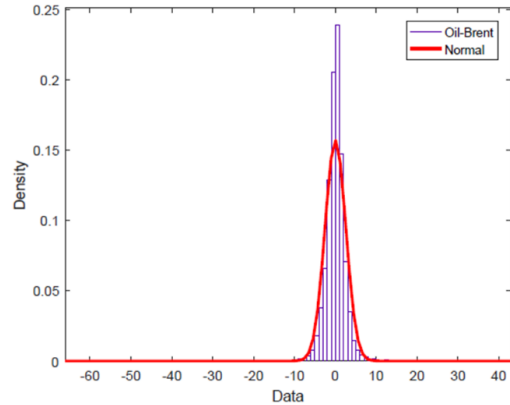
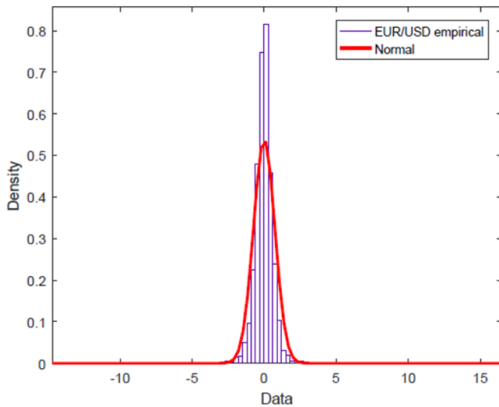
породен от разликата на измервателните скали и разбира се от чисто физическата невъзможност за ежесекундна търговия.

- **Наличие на гебели опашки във вероятностното разпределение на възвръщаемостите;**

Измерванията, направени на високочестотни данни, показват разпределения на възвръщаемостите на активите, които се различават от нормалното разпределение. И по-специфично, една от отличителните характеристики на данните е, че генерират гебели опашки във вероятностното разпределение на възвръщаемостите и че някои активи имат висок четвърти момент (куртоазис). На долните две графики (фигура 1) нагледно е изобразен големият пик на куртоазиса, сравнен с нормално разпределена функция на възвръщаемостите, като са взети два класа активи – 1) Борсово търгуван стоков актив – възвръщаемост на цената на нефт сорт „Брент“ и 2) Валутна двойка Евро-Долар.

- **Отрицателна асиметричност на третия момент и левъридж ефект;**

Този статистически феномен, наблюдаван в емпиричните данни, е математическата интерпретация на това, че честотата на резките спагове е по-ниска в сравнение с честотата на положителните нараствания, но относителният им магнитуд е много по-голям, сравнен с този при положителен тренд. В таблица 2 са изчислени трети и четвърти централни моменти, като ясно се вижда, че при почти всички класове активи стойностите на третия момент са отрицателни.



Фигура 1. Големият пик на куртоазиса, сравнен с нормално разпределена функция на възвръщаемостите

Таблица 2. Трети и четвърти централни моменти

Asset class \ Statistical moments	SOFIX	Oil_Brent	Bitcoin_USD	S&P_500	EUR_USD	VIX
Skewness (3d moment)	-0.725	-1.890	-0.774	-0.415	0.559	0.965
Kurtosis (4th moment)	38.577	55.392	10.799	10.937	97.862	6.341

Друг често наблюдаван феномен при движението на цените е свързан с т.нар. левъридж ефект. Този ефект е свързан с това, че при нарастване на волатилността на актива, то цената му намалява и съответно обратното.

➤ **Дълга памет (long persistence);**

Концепцията за дълга памет е свързана с теорията, разработена от Mandelbrot и Wallis (1969) и Hurst (1951), като тя е свързана с това, че следствия от събития, случили се в далечното минало, влияят на поведението на цената на съответния актив в текущ и бъдещ момент. Имплицитно тази теория допуска, че последователността на събитията, направляващи ценовите движения на активите, е от ключово значение. В научната литература съществува статистически тест,

базиран на изследване на този феномен, като в следващата глава е демонстрирана неговата пригодност към анализа на финансовите пазари.

➤ **Нестационарна вариация**

За разлика от допусканията, правени при повечето широко използвани финансови модели, а именно за константна вариация/стандартно отклонение, емпиричните данни показват точно обратното – наблюдават се както резки движения във вариацията, така и постоянно изменение на времевите отрязъци на вариране на волатилността – в рамките на дни, седмици, месеци и десетилетия. Този феномен е пряко свързан с концепцията за серийната автокорелация и дълга памет на възвръщаемостите на активите.

3. Въведение във фракталния анализ

Фракталната геометрия е наука за нерегулярните и неправилни форми. Интуитивната дефиниция на понятието е представена от Mandelbrot (2008) и гласи, че фрактал е процес, закономерност или форма, при която целостта има идентични съставни части по форма. Както беше споменато в настоящата разработка, една от ключовите характеристики на фракталния процес и принцип в изграждането на финансови модели е търсенето на симетрии и инвариантност – константни фундаментални характеристики на определено явление, които притежават идентична структура независимо от мащаба на наблюдението. На следващата графика (фигура 2) е показана идеята за скалиращата инвариантност, като на графиките са изобразени възвръщаемостите на два класа активи – Bitcoin и S&P 500 при различна честота на наблюдението (дневно, седмично и месечно). Ясно може да се види, че „начупеността“ на графиките е подобна независимо от честотата на измерванията.

По своята дълбинна същност фракталните процеси, както и частично или изцяло стохастичните такива, разглеждат резултативната стойност на изследваното явление, а не се стремят да реконструират детерминистичните взаимовръзки и причини, движещи съответната изходна величина. Това главно се предопределя от факта, че външният наблюдател в общия случай не разполага с необходимата информация, която от своя страна е обективна, качествена и отразяваща коректно количествените

показатели за съответното явление. В тази връзка подхождат теоретично допускът, че динамиката на цените на определен актив, притежава всички свойства, за да може да бъде наречен фрактал, въпреки че обяснението на това защо определен икономически феномен, свързан с инвестиционните решения на различни структурни единици от човешки същества, произвеждат фрактално разпределени динамики на цените на търгованите активи, остава не напълно изяснен въпрос. Подобно обяснение може да се даде с феномен, характеризиращ и обясняващ едно и също явление посредством използването на различен аналитичен, математически или теоретичен инструментариум, като едната теория е по-фундаменталната, а второстепенните изхождат/възникват (emerge) от фундаменталната, въпреки че взаимовръзките между двете са неизвестни или ненаблюдаеми – Carroll (2016) дава пример за тази концепция чрез динамиката на определен газ в затворена система, който може да се обясни както с инструментариума на физиката на елементарните частици (по-фундаменталната теория), така и чрез теорията на флуидите (възникващата теория).

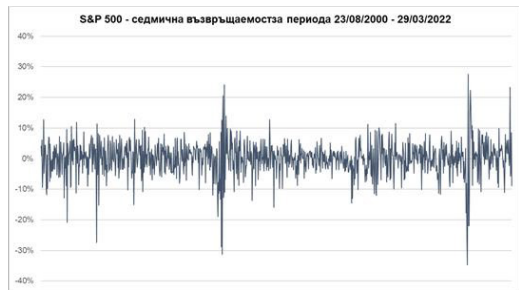
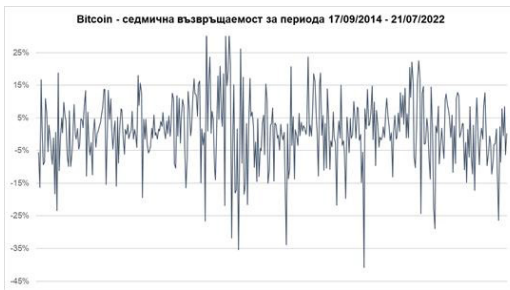
3.1. Фрактално измерение

Както беше споменато, дефиницията на фрактал е една и съща повтаряща се закономерност, която не зависи от мащаба на системата. Един от основните количествени измерители (и основен параметър) на фракталния процес е т.нар. **фрактално измерение**. Фракталното измерение може да се възприеме като количествен измерител на начупеността

Дневна честота



Седмична честота



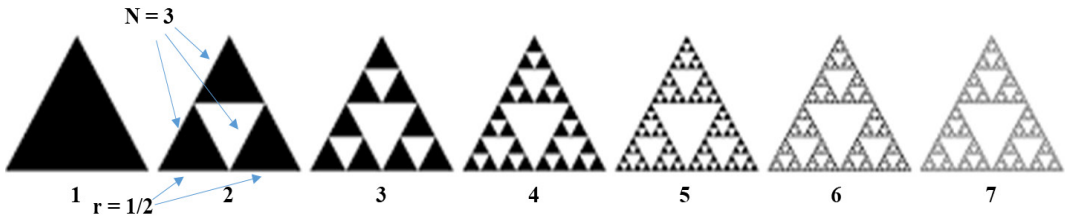
Месечна честота



Фигура 2. Ценова възвръщаемост при различна честота на наблюдението

или на сложността на определен изследван феномен. Известни и интуитивни примери, за да се разбере естеството на фракталното измерение, са кривата на Коч (*Koch Curve*) и триъгълника на Сьерпински (*Sierpinski Triangle*). На фигура 3 е представена фракталната еволюция на триъгълника на Сьерпински, като се започва от първоначалния инициатор

(най-вляво) – с всяка следваща итерация мерната единица (триъгълниците) се увеличават три пъти – $N = 3$, като темпът, с който мерната единица (в случая инициатора/триъгълника) се скалира в прогресия, се удвоява ($r = 1/2$). С всяка следваща итерация може да се наблюдава графично как фракталната форма се появява.



Фигура 3. Фрактална еволюция на триъгълника на Сирпински

Математически, фракталното измерение се дефинира като съотношение между логаритъма от броя на фракталния генератор N и логаритъма на скалиращия компонент r , като фракталното измерение е стриктно по-голямо от топологичното измерение на даден обект. Генерализираната формула може да се изрази по следния начин:

$$D = \lim_{r_n \rightarrow 0} \frac{\text{Log}N(r_n)}{\text{Log}(1/r_n)} \quad (1)$$

Във финансите, фракталното измерение може да се интерпретира като показател на риска, който е алтернатива на стандартните количествени измерители, използвани широко в съвременните финанси, като волатилността (стандартното отклонение) и бета коефициента.

3.2. Експонента на Хърст

Параметърът на Хърст, разглеждан в контекста на фракталните модели, измерва и показва степента на дългосрочна автокорелация (*long memory/long persistence*) на цената на разглеждания актив. Той е тясно свързан с фракталното измерение: $D=2-H$. Теорията гласи още, че освен краткосрочна и средносрочна автокорелация, съществуват и дългосрочни зависимости и закономерности, които на теория имат безкраен ефект върху цената на актива. Един от

основните статистически тестове, които показват степента на ефекта от дългосрочни закономерности, е R/S (*rescaled*) анализът. Използвайки дефиницията на Kinlay (2003), същият е представен по-долу:

$$R/S(n) = \frac{\max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (r_j - \bar{r}_n) - \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (r_j - \bar{r}_n)}{\left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (r_j - \bar{r}_n)^2 \right]^{1/2}} \quad (2)$$

Този статистически тест е конструиран с цел да покаже важността на последователността на събитията, а не толкова силата на техния относителен магнитуд. Неговите стойности кореспондират и могат да се интерпретират по следния начин:

- При $H < 0.5$ – цените имат тенденция към издърпване към дългосрочна средна стойност;
- При $H \approx 0.5$ – цените се държат случайно;
- При $H > 0.5$ – цените имат изразен тренд, при $H \in (0, 1)$

При условия, при които волатилността е силно устойчива и силно променлива, оценката и управлението на риска се превръщат в основна и ключова задача, осигуряваща максимално информирани решения от страна на компаниите, индивидуалните или институционални инвеститори.

3.3. Фрактално Брауново Движение

Фракталното Брауново Движение е центриран себеподобен (*self-similar*) Гаусов процес със стационарни нараствания, които зависят от параметъра на Хърст $H \in (0,1)$. В случай че $H=1/2$, процесът се превръща в традиционното Брауново движение. Nualart (2006) показва, че при други негови стойности, процесът не е полумартингал (*semimartingale*) и следователно лемата на Ито не може да бъде приложена. Разработени са няколко техники с цел конструирането на стохастичен интеграл спрямо ФБД – Апроксимиране на Римановите суми, техниката на Малявин и други. Mandelbrot (1968) дефинира фракталното Брауново движение по следния начин:

Нека $0 < H < 1$. Известно е, че съществува Гаусов стохастичен процес $(B_t^H, t \geq 0)$ така, че $\mathbb{E}(B_t^H) = 0$ и ковариационна функция $Cov(B_t^H, B_s^H) = 0.5\{|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\}$ за всички $s, t \in \mathbb{R}_+$. Такъв процес се нарича стандартно Фрактално Брауново Движение с параметър на Хърст (H). Някои от отличителните характеристики на процеса, дефинирани от Nunpo и Oksendal (2011), както и от Nualart (2006), са следните:

1. Фракталното Брауново движение има стационарни нараствания, т.е. разпределението на $Y_{t+s} - Y_s$ не зависи от s .
2. При $H=1/2$ процесът се превръща в стандартно Брауново движение.
3. При $H \neq 1/2$ ФБД не е полумартингал (*semimartingale*).
4. При $H > 1/2$ ФБД проявява дългосрочна зависимост (*long-range dependence*), дефинирана по следния начин:

$\rho(n) = Cov[B_k - B_{k-1}, B_{k+n} - B_{k+n-1}]$ удовлетворява $\sum_{n=1}^{\infty} |\rho(n)| = +\infty$, което на практика показва, че дългосрочни закономерности могат да имат на теория безкраен ефект върху поведението на актива.

5. ФБД е себеподобен процес – за всяка константа $a > 0$ процесите $\{a^{-H} B_{at}, t \geq 0\}$ и $\{B_t, t \geq 0\}$ имат едно и също разпределение.

3.4. Непрекъснат Марковски Превключващ Мултифрактален Модел

Марковският Превключващ Мултифрактален Модел (МПММ) е смесица от концепции, които са свързани както с фракталния анализ, така и с класа от модели, наричани **превключващи режима модели**, първоначално конструирани и предложени от Hamilton (1989) и детайлно представени от Brooks (2008). По-горе бяха представени основните характеристики и на двата вида процеси. В тази част използвам фрактален модел, разработен от Calvet и Fisher (2008), който показва обещаващи резултати в областта на по-реалистичното моделиране на волатилността на активите.

Марковският Превключващ Мултифрактален Модел е фрактален модел от семейството на моделите на стохастична волатилност, при които условната волатилност е функция от краен брой латентни състояния на волатилността, които притежават различна степен на устойчивост. При непрекъснатата възвръщаемост на цените на активите, дефинирана като: $r_t \equiv \ln(P_t/P_{t-1})$, $r_t = \mu + \sigma(M_{1,t} \times M_{2,t} \times M_{3,t} \times \dots \times M_{k,t})^{1/2} \varepsilon_t$, където μ е условната средно-аритметична

възвръщаемост, ε_t е идентично и независимо разпределена случайна величина и σ е позитивна константа. Едномерният МПММ(k) е характеризирани от четири параметъра $(m_0, b, \gamma_k, \sigma)$, където:

- $m_0 \in (1, 2]$: определя големината на всеки компонент на волатилността;
- $b \in (1, \infty)$: дефинира и предопределя вероятността от превключване/преминаване на всеки компонент на волатилността;
- $\gamma_k \in (0, 1)$: контролира разстоянието между различните компоненти на волатилността и
- $\sigma \in [0, \infty]$: е стандартното отклонение.

4. Приложение на фракталния анализ в различните области на финансите

В настоящата част ще бъде демонстрирано приложението на фракталния анализ в областта на финансовите пазари, като същевременно ще бъде направен и сравнителен анализ между класическите количествени показатели, използвани от финансовите анализатори и техните аналози, произтичащи от фракталната наука и концепция. В допълнение, ограничените допускания, възприети в разработката, ще рамкират анализа до излагането на дескриптивни показатели на база исторически данни. Прогностични и симулационни модели няма да бъдат обект на практическо приложение.

Едно от главните обстоятелства, с които се сблъсква определен икономически агент по отношение на инвестиционните си решения, е определянето на рисковия профил на своята финансова инвестиция. Всички количествени измерители

на риска във финансите имат за цел да обединят и капсулират набор от различни по характер, структура и първоизточник поведенчески модели проявления, на които са действията на икономическите субекти. Следователно, количественото математическо и статистическо описание на финансовите пазари е епидермално проявление на много по-сложни взаимовръзки на човешко поведение по отношение на вземането на инвестиционни решения. Получаването на разбиране за същностното естество на системата и вземането на информирани решения от страна на заинтересованите страни е обект на набор от ограничаващи обстоятелства. Рационализирането и стремежът към усъвършенстване на инструментариума на анализаторите за представянето на определена многообхватна и сложна информация посредством точкова оценка е неизбежна последица от гореспоменатите ограничаващи обстоятелства на стопанските субекти. Целта на настоящата част е именно да демонстрира допълващи единични измерители на определен тип информация. Тези параметри са директно следствие от теорията на фракталите и имат за цел да обогатят и допълнят финансово-икономическата теория и практика.

Тази глава е замислена да провери и тества доколко българският основен борсов индекс SOFIX може да бъде анализиран посредством инструментите на фракталната геометрия. За целите ще се изчислят следните параметри на динамичния ред на абсолютните стойности на индекса, както и неговата непрекъсната лог-възвръщаемост:

- Вероятностното разпределение на възвръщаемостите и напасване на емпиричните данни към Стабилно-Леви разпределение. Изчисление на параметрите. Сравнителен анализ между Гаусовото нормално разпределение и Стабилното-Леви разпределение;
- Изчисление на фракталното измерение на SOFIX;
- Изчисление на експонентата на Хърст;
- Задачи за бъдещи изследвания.

В своите трудове и изследвания Mandelbrot (2008) аргументира, че динамиката на възвръщаемостите на цените на спекулативните активи следват вероятностни разпределения от семейството на Стабилните Леви разпределения (L-stable), а не класическото нормално (Гаусово) разпределение. Taleb (2018) също изследва ефектите от приложението на Леви разпределението по отношение на финансовите пазари. Характеризиращата функция на семейството от стабилни разпределения на Леви е дефинирана по

$$\log f(t) = \log \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iut) dP(U < u) = i\delta t - \gamma |t|^{\alpha} [1 + i\beta(t/|t|)\tan(\alpha\pi/2)] \quad (3)$$

Характеризиращата функция показва, че този тип разпределения са дефинирани от четири параметъра: α, β, δ и γ . δ е параметър, дефиниращ локацията на разпределението и при $\alpha > 1$, δ е равен на очакването на разпределението. γ е скалиращият параметър, а β е параметърът, показващ асиметричността на разпределението (третия централен момент) – като параметърът е в интервала

$-1 \leq \beta \leq 1$. От четирите параметъра най-важен за целите на анализа е параметърът α , измерващ вероятността в опашките на вероятностното разпределение. При Гаусовото нормално разпределение $\alpha = 2$. В своите трудове Mandelbrot (1997) дефинира своя хипотеза, която нарича **Хипотеза на стабилните разпределения на Леви**, която гласи, че: **За вероятностното разпределение на възвръщаемостите на цените на активите, α е в интервала $1 < \alpha < 2$, което имплицитно определя съществуването на очакване (първи момент на разпределението) и безкрайна вариация**. Интуитивно това означава, че при движение на параметъра от стойност 2 до нула, вероятността от наличие на екстремни стойности се увеличава, като трябва да се взема предвид и математическата последица от това, че крайна вариация съществува, само когато параметърът е равен на две, като при стойности $\alpha < 1$, тогава първи централен момент (очакване) на разпределението не съществува. Може да се обобщи, че параметърът може да се интерпретира и като количествен измерител на риска, тъй като вероятностните разпределения с дебели опашки описват по-правдоподобно влиянието на единични явления, оказващи въздействие на статистическите характеристики на цялата популация или динамичен рег. Изчисляването на параметрите и напасването на емпиричните данни към Стабилно-Леви разпределение са извършени на база входящите данни в таблица 3.

Управление на ресурси и разходи

Таблица 3. Изчисляване на параметрите и напасване на емпиричните данни към Стабилно-Леви разпределение

Клас на актива	SOFIX
Дължина на времевия рег	5394; от 17/10/2000-21/07/2022
Честота на наблюдението	Дневна
Обект на измерването	Непрекъснатата лог-възвръщаемост (Дефинирам непрекъснатата лог-възвръщаемост, като: $r_t = \ln(S_t/S_{t-1})$)

Оценката на параметрите на Стабилното-Леви разпределение е представена в таблица 4.

На графиките във фигура 4 са представени емпиричните данни на възвръщаемостите на SOFIX, като към тях може да се види нагледно, че Стабилното-Леви разпределение много по-добре се напасва към данните сравнено с Гаусовото разпределение.

На следващите две графики (фигура 5) още по-отчетливо може да се види, че Стабилното-Леви разпределение се напасва с голяма степен на сходимост към емпиричните данни за разлика от нормалното Гаусово разпределение.

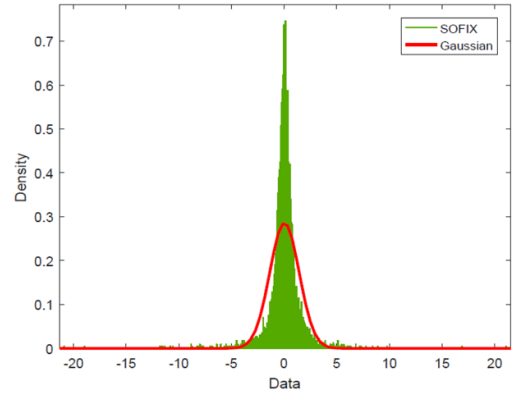
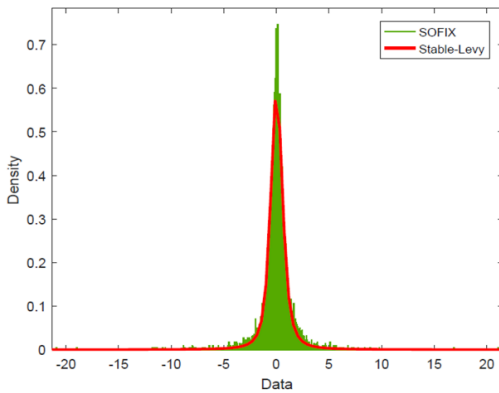
Таблица 4. Оценка на параметрите на Стабилното-Леви разпределение

Distribution:	Levy-Stable
Log likelihood:	-7692.62
Domain:	$-\text{Inf} < y < \text{Inf}$
Mean:	0.0667564
Variance:	NaN

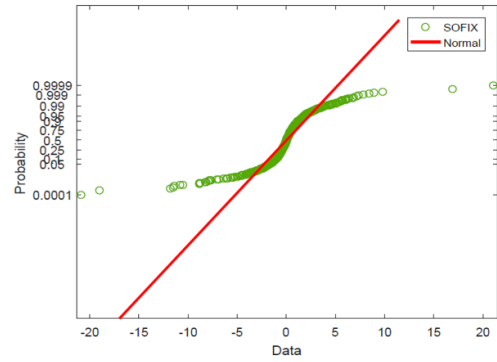
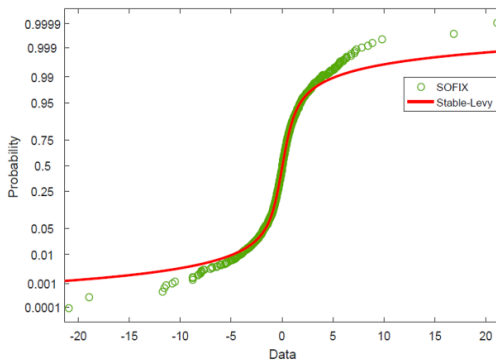
Parameter	Estimate	Std. Err.
alpha	1.37734	0.0201111
beta	0.0522432	0.03518
gam	0.492206	0.00773998
delta	0.0285769	0.0114403

Estimated covariance of parameter estimates:

	alpha	beta	gam	delta
alpha	0.00040446	7.34E-06	4.71E-05	5.49E-06
beta	7.34E-06	0.00123764	1.72E-06	-0.00017824
gam	4.71E-05	1.72E-06	5.99E-05	2.24E-06
delta	5.49E-06	-0.00017824	2.24E-06	0.00013088



Фигура 4. Емпирични данни на възвръщаемостите на SOFIX



Фигура 5. Разлика в степента на сходимост към емпиричните данни при Стабилното-Левви разпределение и нормалното Гаусово разпределение

В таблица 5 са изчислени фракталното измерение и експонентата на Хърст – два от основните показатели в теорията на фракталния анализ. Направен е и сравнителен анализ между гореизброените измерители, от една страна и класическия измерител на риска, дефиниран чрез стандартното отклонение, от друга. Количествените измерители са приложени по отношение на няколко класа активи: VIX, S&P500, EUR/USD, Bitcoin (USD), цената на петрола сорт „Брент“, и SOFIX. Изборът на класове активи е продиктувано от стремежа към

всеобхватност и максимална представителност. Следвайки последователността на текущата част от изследването, фракталното измерение и експонентата на Хърст за индекса SOFIX показват, че индексът има най-високия коефициент на експонента на Хърст спрямо останалите класове активи, което показва, че индексът показва висока степен на устойчивост и наличие на обособен тренд. Имайки предвид тази информация, може да се заключи, че индексът има голям потенциал да бъде прогнозиран относително коректно поради намалено стохастично

Управление на ресурси и разходи

Таблица 5. Фрактално измерение и експонента на Хърст

Клас на актива	Експонента на Хърст (H)	Фрактално измерение (D)	Дневна волатилност (σ)	Годишна волатилност (σ)	Корелация между изтързувано количество и пазарна цена (ρ)
VIX	0.3343	1.6657	6.7442%	106.6348%	-
Bitcoin_USD	0.5633	1.4367	3.9136%	61.8794%	72%
Oil_Price	0.5616	1.4384	2.7654%	43.7242%	9%
SOFIX	0.6812	1.3188	1.3961%	22.0748%	8%
S&P 500	0.4477	1.5523	1.1489%	18.1659%	56%
EUR_USD	0.4882	1.5118	0.7287%	11.5214%	-

Бележка: VIX - Дневно честотни наблюдения за периода 02/01/1990 - 21/07/2022 - дължина на реда - 8202 наблюдения;

Bitcoin_USD - Дневно честотни наблюдения за периода 17/09/2014 - 21/07/2022 - дължина на реда - 2865 наблюдения;

Oil_price - Дневно честотни наблюдения за периода 23/08/2000 - 29/03/2022 - дължина на реда - 5420 наблюдения;

SOFIX - Дневно честотни наблюдения за периода 17/10/2000 - 21/07/2022 - дължина на реда - 5394 наблюдения;

S&P500 - Дневно честотни наблюдения за периода 22/01/1990 - 20/07/2022 - дължина на реда - 8187 наблюдения;

EUR/USD - Дневно честотни наблюдения за периода 01/12/2003 - 21/07/2022 - дължина на реда - 4864 наблюдения.

Влияние (при $H=0.5$ данните се интерпретират, че следват геометрично Брауново движение).

В заключение може да се обобщат основните количествени параметри, произтичащи от фракталната геометрия, приложени ретроспективно по отношение на основния български борсов индекс SOFIX по следния начин:

- $\alpha=1.3773$ – параметърът ясно показва, че вероятностното разпределение на възвръщаемостите се различава драстично от нормалното разпреде-

лени, при което параметърът е около две.

- $D=1.3188$ – фракталното измерение допълва изводите от коефициента алфа, показвайки умерена „начупеност“ на динамичния ред (колкото по-начупен е даден времеви ред, толкова рискът е по-висок).
- $H=0.6812$ – параметърът на Хърст ясно показва изразен потенциал на предсказуемост в данните, което от своя страна може да бъде използвано за конструирането на относително добър прогностичен модел в краткосрочен и средносрочен хоризонт.

5. Заключение

Невъзможността на класическата финансова теория и модели да опишат в желаната дълбочина и прецизност феномените от заобикалящата ни действителност е в основата на приложението на фракталната геометрия във финансите и риска. Фракталният анализ предоставя алтернативна гледна точка и аналитичен апарат, претендиращ за по-правдоподобното свързване на емпиричните феномени с количествен измерител, обобщаващ в максимална степен тяхното поведение и динамика. Този аналитичен апарат има потенциал за развитие не само в областта на анализа на поведението на финансовите пазари, както ретроспективно, така и прогностично, но и в подобластите, свързани с оценката на деривати, управление и измерване на риска и други. Замисълът на настоящата разработка на практика обобщава и дефинира най-базовите концепции и идеи на фракталната геометрия и анализ, приложен в областта на финансовата теория и практика.

Изчисляването на основните фрактални измерители по отношение на основния български борсов индекс, котиран на БФБ – SOFIX показват резултати, които са белег на:

1. Вероятността за големи движения в стойността на индекса е много по-висока от тази предсказвана, ако се използват стандартните финансово-статистически инструменти за анализ;
2. Рискът, измерен чрез фракталното измерение на индекса, е съпоставим с този изчислен посредством волатилността (стандартното отклонение) и

3. Експонентата на Хърст показва завишена степен на конструирането на проспективен модел с висока прогностична сила, поради занижената стохастика в данните и обособен тренд.

В настоящата разработка не бяха разгледани в детайли подходите и методиките за имплементация на фракталната геометрия в прогностичните иконометрични модели. Бяха дефинирани теоретичните постановки на два от най-обещаващите фрактални прогностични модели – Фракталното Брауново Движение (ФБД) и Непрекъснатия Марковски Превключващ Мултифрактален Модел (нМПММ). Практическата пригодност на подобни модели, целящи да предскажат в относително висока степен на релевантност бъдещата рискова структура на финансовите активи, ще бъде задача и предмет на бъдещо изследване.

Числовите изчисления в настоящата разработка са реализирани с помощта на:

- MATLAB 2016a – напасване и оценка на параметрите на данните за SOFIX към Стабилно-Леви разпределение и Нормално разпределение;
- PYTHON (<https://colab.research.google.com/notebooks/intro.ipynb>) – изчисление на фракталното измерение и експонентата на Хърст за различните анализирани типове активи.

Публикацията съдържа резултати от изследване, финансирано със средства от фонд НИД на УНСС, договор № НИК-НИ 2/2020 г.

Цитирани източници (References):

1. Brooks, C. (2008). *Introductory Econometrics for Finance*, 2nd edition, Cambridge University Press.
2. Calvet, L., A. Fisher (2008). *Multifractal Volatility: Theory, Forecasting and Pricing*, Elsevier Inc.
3. Carroll, S. (2016). *The Big Picture: On the Origin of Life, Meaning and the Universe Itself*, Oneworld Publications.
4. Fama, E.F. (1970). Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *The Journal of Finance*, Vol. 25, No. 2; Blackwell Publishing for the American Finance Association.
5. Fama, E.F., K.R. French (1988). Permanent and Temporary Components of Stock Prices. *Journal of Political Economy*, vol. 96, no. 2, University of Chicago.
6. Federal Reserve Economic Data | FRED | St. Louis Fed - <https://fred.stlouisfed.org/> <https://finance.yahoo.com/>
7. Hamilton, J.D. (1989). A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle. *Econometrica*, Vol. 57, No. 2 (March, 1989), 357-384.
8. Hurst, H.E. (1951). Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*.
9. Kinlay, J. (2003). Long Memory and Regime Shifts in Asset Volatility, *WILMOTT Magazine*.
10. Lo, A. (2019). *Adaptive Markets: Financial Evolution at the Speed of Thought*, Princeton University Press.
11. Mandelbrot, B.B. (1997). *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk*; Springer.
12. Mandelbrot, B.B., J.R. Wallis (1969). Robustness of the Rescaled Range R/S in the Measurement of Noncyclic Long Run Statistical Dependence, International Business Machines Research Center, Yorktown Heights, New York 10598.
13. Mandelbrot, B.B., J. Van Ness (1968). Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications. *SIAM Review* Vol. 10, No. 4, October 1968, 422-437.
14. Mandelbrot, B.B., R.L. Hudson (2008). *The (mis)Behavior of Markets: A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward*, Basic Books.
15. Nualart, D. (2006). Stochastic calculus with respect to fractional Brownian motion. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, Vol. XV, n1, 2006, pp. 63-77.
16. Nunno, G., B. Oksendal, Editors (2011). *Advanced Mathematical Methods for Finance*, Springer.
17. Peters, E.E. (1994). *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*, John Wiley & Sons, Inc.
18. Taleb, N.N. (2018). *The Statistical Consequences of Fat Tails: Research and Commentary (Technical Incerto, Vol 1)*, Stam Academic Publishing.

Analiz na balgarskia finansov pazar posredstvom prilozhenieto na fraktalnata geometria

Petar Rangelov

Application of Fractal Geometry in Studies of the Bulgarian Financial Market

Petar Rangelov

Abstract: The present study presents and summarizes in a condensed manner the basic postulates and concepts arising from the principles and ideas of fractal geometry, applied in the field of behavior and dynamics of financial markets. A comparative analysis has been made between the classic financial and statistical indicators for measuring and summarizing a certain state of the financial system, on one hand, and the main quantitative parameters resulting from the fractal analysis, on the other. In the last part, an analysis and test for fractality of the Bulgarian financial market has been made represented by the main stock index – SOFIX.

Key words: fractal process, fractal dimension, Hurst exponent.

JEL: C46, C58, G11.