

Оценяване на реални опции при различна динамика на базовия актив

Петър Рангелов*

Резюме: Настоящата разработка** е замислена с цел да се демонстрира приложението на опционната техника за оценяване в областта на реални активи и в частност – цели предприятия. Представени са главните постулати и допускания, стоящи в основата на оценяването на опции, като с цел да се изведе максимално правдоподобна методология за оценяване, ключов акцент е поставен върху динамиката на базовия актив. Анализирани са основните вероятностни процеси, моделиращи поведението на цените на активите, цитирани в научната литература и използвани в практиката. В практическата част опционната техника е приложена за оценяване на предприятие, опериращо в областта на добива, производството и продажбата на нефт, като са направени две паралелни сравнителни оценки на предприятието в зависимост от допусканията за динамиката на несигурността на базовия актив, носител на стойността.

Ключови думи: скоково-дифузен процес, корелиран модел на Хестон, реални опции, стойност на предприятието.

JEL: G11, G13, C22, C51.

1. Въведение

При оценяването на предприятия, които разполагат с инвестиционни проекти,

притежаващи възрадени опционни характеристики, прилагането на доходния подход или подхода на пазарните сравнения системно подценява тяхната стойност. Причина за това е, че тези подходи за оценка не вземат предвид евентуалните бъдещи ползи, породени от реализацията на несигурни събития, които биха имали позитивен ефект върху генерираните парични потоци от компанията и следователно биха увеличили стойността ѝ. Прилагането на подхода за ценообразуване на опции, обект на който са инвестиционни проекти или предприятия, позволява да се вземат предвид ефекти върху стойността, които в противен случай при прилагането на други подходи биха били пропуснати или силно подценени. Най-често този подход се прилага за предприятия от фармацевтичната промишленост, предприятия от добивната и енергийна промишленост, новоучредени компании (*start-ups*) и други. Две големи трудности при прилагането на такъв модел за оценка са свързани с (i) Техническата комплексност на концепцията за опционно оценяване и (ii) икономическата обоснованост, релевантност и имплементация на допусканията, стоящи в основата на оценяването при прилагането им в практиката по отношение на оценяване на реални активи.

В настоящата разработка правя опит за систематизирано представяне на основните трудности при прилагането на опционната техника за оценка на реални активи, както и преглед на най-често използваните процеси, използвани за моделирането на динамиката на базовия актив. Поради многообразието и в определени случаи сложност-

* Петър Рангелов е задочен докторант в катедра „Финанси“ на УНСС.

** Публикацията съдържа резултати от изследване, финансирано със средства от фонд НИД на УНСС, договор № НИК-НИ 2/2020 г.

та, свързана с математическата и статистическа постановка на моделите, ще се търси определена степен на обобщеност. Структурно, в началото се спирам на преглед на същността на опционната техника, свързана с нейната икономическа логика и конструкция. Необходима последица на икономическата интерпретация е математическото изразяване и взаимовръзка на теоретичните постановки в контекста на направените допускания. На следващо място правя преглед на двата типа опции – американски и европейски, като особено внимание поставям върху техниките и разработките за оценка на американски тип опции поради тяхната непосредствена пригодност към оценката на реални активи. Разгледани са основни вероятностни модели, използвани във финансите. Последната част е посветена на оценка на предприятие, опериращо в добиването, експлоатацията и производството на нефт и горива.

1.1. Цели

Преследваните цели в настоящата разработка се изразяват в следното:

1. Кратко представяне на основните постулати, на чиято база са изградени анализът, теорията и практиката на концепцията за опционно оценяване;
2. Излагане на вероятностните процеси, описващи различните статистически емпирични характеристики, типични за определени класове активи;
3. Преглед на използваните изходни ценови формули, вследствие на интегрирането на опционната структура на паричните потоци към тяхната вероятностна мярка и динамика, описана посредством представените вероятностни модели;
4. Оценяване на предприятие посредством използването на подхода и анализа на реални опции и моделиране на подлежащата несигурност на базовия актив чрез корелиран модел на Хестон и скоково-дифузен модел на Мъртън.

1.2. Методология

Историко-ретроспективен преглед – използван във връзка с историческия преглед на теоретичните основи, идеи и постижения в извеждането на икономическия фундамент на опционното оценяване;

Сравнителен анализ – използван главно по отношение на прегледа на конкуриращите се стохастични модели, които осигуряват вероятностен закон спрямо дефинирането на различни допускания, както и сравнението и изборът на най-подходяща техника за решаването на определения проблем;

Критичен анализ – спрямо теоретичните и практически постановки, допускания и проблеми в областта на оценяването на реални активи чрез използването на опционната техника.

2. Дефиниране на техниката на опционно оценяване

2.1. Икономическа постановка

Една от най-трудоемките задачи при практическото използване на подхода на опционно оценяване в сферата на инвестиционния мениджмънт е базовият икономически аргумент, върху който се гради оценяването. Той се изразява в конструирането на „синтетичен“ портфейл, който перфектно да имитира функцията на изплащане от опцията (*payoff function*). Нещо повече, необходимостта от динамично ребалансиране, на теория непрекъснато във времето, е основен постулат, чийто резултат е елиминиране на целия системен риск и гарантиране на риск-неутрална възвръщаемост. Изпълнението на всички тези условия на практика е почти невъзможно. Допълнителна трудност е също и дефинирането на коректен и правдоподобен динамичен процес на базовия актив, различен от лог-нормалния, дали опцията е от европейски тип или американски, наличие на допълнителни транзакционни разходи, свързани с необходимостта от динамичното хеджиране на репликиращия портфейл, наличието на качествена и достоверна

информация, ефективност на пазара, изразяваща се в липса на арбитражни възможности, рационално поведение на пазарните участници и други. Въпреки всички трудности, породени от необходимостта за спазване на всички допускания, на чиято база се извежда ценовата формула за справедливата стойност на опция, Taleb (2005, 2015) и Derman (2005) предлагат алтернативни методики за преодоляването на някои от тези практически трудности.

2.2. Математическа постановка

Математически, стойността на опция (било то финансова или реална) се получава, като се интегрира функцията на изплащане от опцията (*payoff function*) към някаква вероятностна мярка, генерирана от процес, който

$$= \int_K^{+\infty} (S - K)f(S)dS \quad (1)$$

Amram и Kulatilaka (1999) систематизират техническото определяне на очакваната стойност на дадена опция посредством три подхода: 1) Съставянето и решаването на Частно Диференциално Уравнение – ЧДУ; 2) Подход на Динамично Програмиране; и 3) Симулационен подход. Таблично трите подхода и прилежащите им модели за решение са представени в таблица 1.

Математическите техники за намиране на стойността на опция, допускайки риск-неутрална оценка, са многообразни и зависят главно от типа на опцията и нейните

Таблица 1. Подходи и прилежащите им модели за решение

Решение на Частно Диференциално Уравнение (Partial Differential Equation - PDE)	• Аналитични (точни) решения (Analytical solutions) • Аналитични приближения (Analytical approximations) • Числови методи (Numerical solutions)
Подход на Динамично програмиране (Dynamic Programming)	• Биномни дървета (Binomial trees) • Триномни дървета (Trinomial trees)
Симулационен подход (Simulation)	• Монте Карло симулация (Monte Carlo Simulations)

то следва базовия актив. При формулата на Блек-Шоутс-Мъртън функцията на изплащане на опцията се дефинира като разлика между цената на базовия актив S и цената на упражняване K , още наричана прицелна (*Strike*) цена, или $(S - K)$, а вероятностната мярка $f(S)dS$ (където $f(S)$ е вероятностната функция на плътността на базовия актив) е генерирана от лог-нормален процес или което е същото – геометрично Брауново Движение – ГБД. Интегралната форма на очакваната стойност на дадена опция е както следва:

$$E[V_0] = E[\max(S_T - K, 0)] =$$

характеристики. Може да се разделят в две основни групи – 1) дали опцията е от Европейски или Американски тип; и 2) точната специфика на динамиката на базовия актив.

2.3. Европейски тип опции

Европейският тип опции дава на притежателя им правото да ги упражни единствено при настъпването на падежа им. Най-често срещаните типове европейски опции са финансовите опции, търгувани на регулирани пазари, и тези, търгувани извънборсово. В областта на оценяването на реални активи посредством използването на опционната техника, много често опциите не притежават

характеристики на европейски, а по-скоро в голямото си множество са от американски тип. В общия случай съставянето на ценова формула за получаване на тяхната стойност се постига чрез съставянето и решението на ЧДУ, най-известното от които е ценовата формула на Блек-Шоулс-Мъртън. Съществуват относително добри методи за намирането на стойността на Европейски тип опции, чиито базов процес е от типа на **моделите на стохастична волатилност**, като например моделът на Stein-Stein (1991), моделът на Hull-White (1987) и моделът на Heston (1993). Carr и Madan (1999) развиват техниката за намиране на стойността на подобен тип опции чрез спецификация на характеризиращата функция на дългосрочната волатилност и намирането на точна формула чрез прилагането на трансформация на Фурие.

2.4. Американски тип опции

Американският тип опции дава на тържателя им правото да ги упражни по всяко едно време преди настъпването на падежа. Разумно е да се допусне, че притежателят на такава опция ще избере стратегия, която да максимизира очакваната печалба от опцията, следователно стигаме до проблематиката, свързана с оптималното спиране/упражняване (*optimal stopping*) на опцията, която може да се проследи в трудовете на Dixit и Pindyck (1994) и Lamberton и Lapeyre (2008). Такива типове казуси са решения на т.нар. гранични проблеми (*boundary problems*), за които е известен специфичният тип на диференциално уравнение, направляващ динамиката на опцията, но освен намирането на неговото решение спрямо обективно поставените първоначални гранични условия, е нужно да се намери и областта, за която решенията важат от гледна точка на определяне на оптимална зона за упражняване на опцията. Извличането на точни аналитични решения е почти сигурно невъзможно. Поради тази причина са разработени множество числови или приближаващи методи за решение на съответния проблем.

Сох, Ross и Rubinstein (1979) предлагат може би най-широко приложимия и интуитивен метод – модел на биномните дървета. Един от основните апроксимиращи методи, които се използват, е приближението на Barone-Adesi-Whaley (1987, цитирано в труда на Haug, 1997). Този метод е широко свързан с използването на алгоритъма на Нютон-Рафсон и е относително лесно приложим, въпреки че има и много недостатъци. Друга приложима апроксимираща техника за Американски тип опции е техниката, разработена от Bjerkstrand-Stensland (2002). При американския тип опции съществуват два основни въпроса, които засягат и интересуват тържателя ѝ, а именно – каква е справедливата стойност на деривата и дали незабавното ѝ упражняване е оптимално. Заевски (2021) предлага алгоритъм за разреждане на горните два проблема чрез апроксимиране на границата на спиране чрез експонента на частично линейни функции (*piecewise linear functions*), максимизиращи функцията на полезност за тържателя на опцията.

2.5. Мотивация за опционното оценяване на реални активи

Прилагането на техниката за оценка на опции или още оценка на условните задължения (*Contingent claims valuation*) в областта на инвестиционния анализ и оценката на цели предприятия има своите теоретични предимства пред използването на класическите модели на дисконтирани парични потоци, изразяващи се основно във вземането под внимание на проекциите на възможностите за проактивното управление на инвестициите върху стойността на актива или по друг начин казано – стойностното материализиране на възможността за гъвкавост и промяна. Освен своите предимства, не всеки инвестиционен проект или предприятие може да бъде оценено по този начин. Основните характеристики, които са предпоставка за възможно използване на опционната техника, са представени по-долу, като такова описание не бива да бъде възприемано като пълно и всеобхватно.

– Силно задължени предприятия

Според Damodaran (2003), силно задължените предприятия са класически пример за оценка на собствения им капитал, като кол опция. В хипотезата, че акционерите имат право да ликвидират предприятието, в случай че то има сериозни проблеми и при обективни ограничения в техните задължения по отношение на обхвата на понесени загуби, ограничаващи се само до техните дялове от основния капитал, то собственият капитал придобива характеристики на кол опция. При фирми със значителни задължения и отрицателни доходи, стойността на опцията почти винаги е по-висока от стойността, получена чрез моделите на дисконтирани парични потоци.

– Предприятия, притежаващи патенти и лицензи

Друг тип предприятия, при които опционното оценяване потенциално е приложимо, са предприятия, притежаващи патенти или лицензи за разработването на определен продукт, чиято реализация е несигурна. Такива предприятия са най-често от областта на *фармацевтичната индустрия*, *добивната промишленост* и други.

– Електроцентрали

Различните типове електроцентрали също притежават характеристики на опции и следователно могат да бъдат оценявани по такъв начин. Причината е свързана със специфичната характеристика на икономиката на бизнеса, а именно: голяма част от изходящите потоци зависят от вариабилността на цената на входа на процеса, например при газовите електроцентрали изходящите парични потоци са функция от цените на газа, при електроцентралите, базирани на нефт – от цената на нефта. Входящите потоци зависят от цената, по която ще се продаде произведеното електричество, тоест стойността на електроцентралата се предопределя от два източника на несигурност, които могат да се моделират в рамките на концепцията за опционно оценяване.

– Многоетапни инвестиционни проекти

Многостъпковите инвестиции в портфейлите на предприятията също биха могли да бъдат оценени като различни типове опции (отлагателни, многостъпкови и т.н.). Такива инвестиции по същност и замисъл са конструирани с цел да се възползват от несигурността, въплътена в проекта, и да бъдат управлявани динамично, което на практика е дефиницията на опционната теория за оценка.

– Новосъздадени фирми (Start-ups)

Новите предприятия, опериращи в динамична икономическа сфера, също притежават характеристиките на опции, тъй като в общия случай по време на началната фаза на жизнения цикъл на дадено предприятие то притежава голяма степен на несигурност, която е един от признаците, които трябва да притежава един актив, за да може той да бъде оценяван посредством методиката на условните задължения.

3. Динамика на базовия актив

Един от най-важните и трудни за разрешаване проблеми в процеса на опционно оценяване е дефинирането и избор на коректен модел, описващ структурата и динамиката на несигурността, произтичаща от базовия актив. За целта в настоящата част са представени най-широко разпространените в научната литература модели за описание на цените на различни класове активи, като целенасочено най-голямо внимание ще обърнем към класическите модели и моделите за описание на стоковете (*commodities*) активи, които в повечето случаи вземат участие по един или друг начин в оценката на реални активи.

3.1. Геометрично Брауново движение (*geometric Brownian motion*)

Приложението на геометричното Брауново движение за моделиране на цените на активите е стара концепция, която може да се проследи до разработките на Samuelson (1965). Едно от най-важните качества на модела е, че произвежда положителни стойности, което е задължително условие при

наблюдението на цените на активите (даже на акция не може да има отрицателна цена). ГБД е в основата на формулата за оценка на европейски тип финансова опция на Блэк-Шоулс-Мъртън, като този процес може да се счита за класически, тъй като се прилага в много области на финансите не само свързани с оценяването на опции. В най-стандартната си форма ГБД се дефинира чрез следното стохастично диференциално уравнение:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2)$$

dS_t е случайно движение на спот цената S_t в рамките на малък времеви интервал $[t, t + dt]$, параметрите μ и σ съответно са трендът (грифт) и стандартното отклонение (волатилността), и dW_t е нарастването на стандартно Брауново движение (още Винеров процес) за същия период от време.

Трите най-важни качества на Брауновия процес са следните:

1. Нарастванията на dW_t са нормално разпределени величини със средна нула и стандартно отклонение $\sqrt{dt} \Rightarrow dW_t \sim (0, \sqrt{dt})$
2. За всеки два времеви момента, нарастванията dW_{t_1} и dW_{t_2} са независими.
3. Траекторията на W_t е почти винаги непрекъсната.

Друга често срещана форма на горното представяне на ГБД се постига чрез следното заместване: $G_t = \ln S_t$.

Използвайки лемата на Ито се стига до: $dG_t = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t$

По дефиниция спот цената $S_T = \exp(G_T)$ – (или което е същото $G_T = \ln S_T$) е лог-нормално разпределена (Разпределението на S_T имайки предвид първоначалната цена S_t е:

$$Pr(S_T = x | S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \ln S_t - \mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2}.$$

Очакването е представено посредством следното уравнение:

$$E(S_T | S_t) = S_t e^{\mu(T-t)}; T \geq t$$

3.2. Процеси от типа обръщане към дългосрочната средна стойност (Mean-reverting)

Много от търгуваните активи не се вписват в концепцията за геометрично Брауново движение, като в частност ГБД не успява да се напасне изцяло към емпиричните данни. Някои типове активи, главно **лихвените проценти и цените на стоковите активи** проявяват тенденции към „издърпване“ на техните стойности към определена дългосрочна стойност – колкото повече текущата цена се отдалечава от тази дългосрочна средна стойност, толкова вероятността за обръщане отново към нея се увеличава. За да се отчете издърпващият ефект към средната стойност, ГБД може да се коригира и представи по следния начин:

$$\frac{dS_t}{S_t} = k(S_\infty - S_t)dt + \sigma dW_t \quad (3)$$

където S_∞ е дългосрочната средна абсолютна стойност на спот цената на актива, а k е силата на издърпване към тази средна стойност. Лявата страна на уравнението представлява незабавната (*instantaneous*) промяна на спот цената. Първото събираемо от дясната страна на уравнението представлява детерминистичният тренд на цената, който е с положителна стойност, ако цената е под дългосрочната си средна S_∞ и с негативна стойност, ако е над средната, което като резултат довежда до повишаване на вероятността на промяна на цената в посока на средната стойност в следващия период. Дългосрочната средна абсолютна стойност може да се преобразува и представи като логаритъм по следния начин:

$$\frac{dS_t}{S_t} = k(\theta - \ln S_t)dt + \sigma dW_t \quad (4)$$

където $\theta = 1/2k\sigma^2$ е дългосрочната средна от логаритъма на цената.

Този тип модел е широко използван при обяснението на динамиката на активите от енергийната сфера, като нефт, газ и други, тъй като се напасава по-добре към феномена, който те притежават, а именно издърпване към средна стойност. Друг позитив на модела е сравнително лесното определяне на параметрите му. От друга страна, един от главните му недостатъци, който е валиден за повечето разглеждани и използвани в практиката модели, е, че допуска непрекъснатост на траекторията на цените.

3.3. Модели на стохастичната Волатилност (Stochastic volatility)

Повечето класове активи се характеризират с променяща се изменчивост (волатилност) с течение на времето. Такова поведение се забелязва при стоковете активи и цените например на електричеството. Типичният модел на ГБД, както и класическата методология за оценка на опции на практика допускат, че волатилността на възвръщаемостта от актива е константа, което ясно противоречи с емпиричните данни. За да се моделира този феномен, в инструментариума на анализаторите влизат на помощ моделите от семейството на стохастичната волатилност.

- Константна еластичност на волатилността (CEV – Constant Elasticity of Volatility)

Един от най-опростените модели на стохастична волатилност е моделът на константна еластичност, чието допускане е, че мигновената волатилност зависи от самата цена на актива.

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma(S)dW \quad (5)$$

Като при положение, че искаме да моделираме позитивна или отрицателна корелация между стандартното отклонение и самата цена, моделът може да се представи по следния начин:

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma S^\alpha dW \quad (6)$$

където корелацията се моделира чрез параметъра α – при $\alpha > 0$ е налична позитивна корелация. Позитивите на този модел са, че той описва добре т.нар. левъридж ефект – при нарастване на волатилността на актива, то неговата цена спада и съответно обратното. Недостатък на модела е, че не е подходящ за представяне и обяснение на поведението на цените на природния газ, както и за цените на нефта.

- Модел на локална волатилност

Един от правдоподобните количествени методи за определяне на волатилността на активите е чрез т.нар. волатилност по подразбиране (*implied volatility*), която е извлечена от напасването ѝ към пазарните стойности на търгувани опции, използвайки формулата за оценка на опции на Блек-Шоутс-Мъртън, или функционално може да се представи по следния начин:

$$\sigma^{implied} = \sigma(t, T, S, X, r, V^{market option})$$

Може графично да се изобрази динамиката на промяна на волатилността посредством триизмерен образ, където трите измерения са дефинирани чрез: волатилността по подразбиране, прицелната цена и времето на падеж. Такава графика още е по-известна като повърхност на волатилността (*volatility surface*). Моделът на константната еластичност на волатилността допуска взаимовръзката между волатилността, времето и цената на актива. Един от големите недостатъци на този модел е невъзможността за напасване на волатилността към емпиричните данни на повърхността на изменчивост. Моделът на локална волатилност в голяма степен преодолява този недостатък и се вписва по-добре към наблюдаваните данни.

- Модел на Хестон и модел на Хъл-Уайт

Два от известните и цитирани модела на стохастична волатилност са тези, разработени от Hull-White (1987), и по-новият модел на Heston (1993). Най-общо, цената и волатилността на определен актив се дефинират чрез два геомет-

рични Браунови процеса (един за цената и един за волатилността), като при процеса на Хъл-Уайт корелацията между двете Браунови движения се допуска да бъде нула, а при модела на Хестон корелацията се взема предвид и обичайно е положителна величина. Допускането за нулева корелация води до значително улесняване на изчисленията, докато вземането предвид на положителни стойности на корелацията между Брауновите движения води до по-добра обяснителна способност на модела. И двата модела могат да бъдат имплементирани към опционното оценяване, въпреки че задачата е трудоемка, тъй като достигането до решения за определяне на ценова формула изисква използването на числови методи – симулации, метод на разликите (*finite difference*), приближаващи методи и други.

- Модели от семейството на Авторегресионната условна хетероскедастичност (ARCH)

През 1982 г. Engle (1982) разработва процес, моделиращ променлива във времето (*time-varying*) вариация, по-известен като процес на авторегресионна условна хетероскедастичност (ARCH). На база на неговата концепция се създават поредица класове от модели, целящи да опишат и калибрират този феномен, като някои от вариациите на ARCH моделите са: процес на генерализирана авторегресионна условна хетероскедастичност (GARCH), разработен от Bollerslev (1986), E-GARCH (експоненциален), представен в труда на Nelson (1991). Taleb (1997) систематизира още няколко често използвани модела от това семейство, някои от които са: N-GARCH (нелинеен), SWARCH (сменящ режима), H-GARCH (хетерогенен) и други. За GARCH съществуват множество изследвания, свързани с използването му при оценката на опции, като Heston и Nandi (1997) за първи път изграждат консистентна методология и извеждат ценова формула за стойността на опция.

3.4. Скоково-дифузни процеси (Jump-diffusion)

Друг често наблюдаван емпиричен феномен е наличието на резки скокове в цените на някои типове активи. Такова поведение на цените би могло да се обясни основно от две причини: *i.* В настоящия анализ всички разглеждани модели имплицитно допускат непрекъснатост на цените. В действителност, ако се навлезе в дълбочина и се разгледа микроструктурата на пазарите, ще се види, че всеки тип актив си има физични и функционални специфики, които определят и влияят до определена степен на самите цени. Освен това, наблюдаемите данни ясно показват дискретни проявления на цените, дължащи се на ограниченията по време и обхват на борсовата търговия, и както беше споменато – специфичната структура на пазара. *ii.* Втората правдоподобна хипотеза за обяснение на скоковото поведение на цените е чисто икономическа, дължаща се на детерминистични явления, които поради тяхната непрегсказуема природа или латентна същност биват моделирани вероятностно. Такива причини са глобални или силни локални шокове като войни, пандемии, природни бедствия или друг тип външни причини, оказващи влияние на цените. Например евентуална война би довела до резки промени в кратък отрязък от време на цените на газа или на нефта, или по-пресен пример – пандемията довежда до шок на цените на основните финансови активи.

Скоковото поведение и променливата с течение на времето волатилност са емпирични феномени, чиито първоизточници трудно могат да бъдат разграничени. На пръв поглед изглежда, че лесно може да се каже кой феномен задвижва процеса на генериране на цените, но ако се изследва в дълбочина например променящата се по подразбиране волатилност (*implied volatility*), може да се направи двусмислен извод, че е възможно да се обясни, както чрез моделите на стохастична волатилност, така

Икономически теории

и чрез скоков процес. Das и Sundaram (1998) показват, че разграничението между това кой модел е подходящо да се използва, за да се обяснят в най-голяма степен наблюдаемите данни се постига чрез вземането предвид на следните две характеристики:

- При скоковите модели се наблюдава намаляване на четвъртия момент (куртоазиса) в зависимост от честотата на наблюденията. Например ако се наблюдава коефициент на четвъртия момент при дневни данни, който е по-висок от измерения коефициент при седмични, а той от своя страна е по-висок от месечния коефициент на четвъртия момент, то тогава обосновано може да се предположи, че процесът е скоков.
- При стохастичната волатилност повишението на четвъртия момент прите-

относителната сила на скока да бъде променено на лог-нормално, което е консистентно с използваната нотация в предходните модели. Така разглежданият модел относително добре може да опише дискретния характер на някои типове активи, при които се наблюдават скокове на цените и оставането им в този диапазон. Deng (1998) показва друга модификация на процеса, която е подходяща да се използва при цени на активи, при които се наблюдават резки движения в цените и след кратък период от време връщане на цената в предишния ѝ порядък (*spikes*), а именно комбиниран модел от скокова-дифузия и процес от типа обръщане към средната стойност. Обобщение на най-използваните модели от това семейство в научната литература и практика може да се види в таблица 2.

Таблица 2. Обобщение на най-използваните модели

Модел от семейството на скоковите дифузии	Поведение на цените
Класически скоково-дифузен модел с нормално или лог-нормално разпределение на силата на скоковете	При цени на активи, при които се наблюдават дискретни скокове
Скоково-дифузен модел с експоненциално разпределение на силата на скоковете – Kou и Wang (2001)	При цени на активи, при които се наблюдават дискретни скокове – по-правдоподобно моделиране на скоковете
Комбиниран Скоково-дифузен процес и процес на обръщане към средната стойност	При цени на активите, при които се наблюдават скок и връщане на цената в предишния си порядък – <i>spikes</i>

жава обратната закономерност – нараства с увеличаването на честотата на наблюденията.

Merton (1976) дефинира класическия скоково-дифузен процес, като съчетава модел на геометрично Брауново движение, към който е добавен втори източник на несигурност, моделиращ скоковете в цените посредством Поасонов процес. При този модел разпределението на силата (магнитуда) на скоковете за единица време е нормално разпределена величина. Лесно може разпределението на

3.5. Сменящи режима модели (Regime-switching)

При много финансови и икономически времеви редове се наблюдават промени в динамиката на базовите статистически характеристики, дефиниращи явлението, в зависимост от времевия период. Поведението на реда може да се промени по отношение на статистическите моменти, дефиниращи формата на вероятностното разпределение или спрямо друга базова ха-

рактеристика. Brooks (2008) разграничава и дефинира, че промените в тези параметри може да се сменят и да останат такива и за в бъдеще, което явление е познато, като „структурен пробив“ (*structural break*), но може и да се сменят и след определен период от време пак да се върнат към старите си стойности „смяна на режима“ (*regime switching*). Причина за такива смени на режима по отношение на динамиката на пазара може да се разделят в две групи – първата група: поради глобални икономически, социални или природни явления като войни, глобални финансови кризи, промяна на политики и други, и втората група от фактори, дължащи се на промяна на микроструктурата на различните пазари, като например въвеждането на иновативен технически способ за повишаването и оптимизирането на търговията на съответния пазар и т.н. Вярно е обаче също, че промените в режима могат да се случват и с много по-висока честота. Такива промени могат да възникнат в резултат на сложни и в някои случаи ненаблюдаеми фактори, но все пак водещи до статистически значими характеристики в поведението на изследваното явление

4. Интегриране на вероятностната мярка и определяне на стойността на опцията

Едно от главните предизвикателства в настоящата разработка е свързано с излагането и представянето на достиженията на методите и техниките за интегриране на динамиката на базовия актив към различен тип функции на изплащане, дефиниращи паричните потоци. Гъвкавостта на методологията трябва да бъде една от водещите цели, тъй като характеристиките на паричните потоци не са еднакви при всички оценявани активи. Освен това, от ключово значение са наличността и качеството на информацията, с която ще се зареди изборът от анализатора модел с цел намиране

на параметрите, дефиниращи процеса. При липса на такава информация реална и максимално правдоподобна оценка не може да бъде извършена, като в такива ситуации най-разумно е използването на стандартните подходи и модели за оценяване на съответния актив.

Търсенето на баланс между сложността и многообразието от използвани както статистически техники, така и абстрактни финансови концепции, и риска от това цялата методология да се превърне в „черна кутия“, която се зарежда и произвежда крайни, но неразбираеми резултати е важно условие, към което трябва да се подходи внимателно. Все още математическият инструментариум е ограничен по отношение извеждането на едно уникално решение на диференциално уравнение, движено от стохастичен процес, който е различен от традиционното Брауново движение. Точните аналитични решения или приближаващи (*approximation*) техники, които са близки до числовите методи, са трудно приложими не само спрямо конкретния процес. По-году представям преглед на някои от изходящите модели на стойността на опция, спрямо различни процеси, генериращи динамиката на базовия актив, като ще се представят и ценовите формули, които ще използвам в практическата част.

Оценка на европейски тип опция, допускайки процес от типа обръщане към средната:

Европейска кол опция с падеж T и прицелна цена X

$$C(t_0, S_0; T, X, \theta, k, r, \sigma) = e^{-r(T-t_0)} E(\max\{S_T - X, 0\}) \quad (7)$$

Подробно извеждане на очакването на горното уравнение е направено от Eydeland (2003).

Оценка на европейски тип кол опция, допускайки процес на Хъл-Уайт:

Икономически теории

Стойността на европейска кол опция се извежда като средно-претеглена вероятност-на реализация на волатилността спрямо стойността по формулата на Блек-Шоутс (BS):

$$C = E_{\sigma, S}[max(S - K, 0)] = E_{\sigma} \left[BS \left(\frac{\sqrt{\int_t^T \sigma_s^2 ds}}{\sqrt{T-t}} \right) \right] \quad (8)$$

Оценка на европейски тип опция, допускайки скоково-дифузен процес:

Стойността на кол опция се получава чрез решение на следното уравнение:

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda \Delta t} (\lambda \Delta t)^n}{n!} C_{BS} \left(t, S; T, X, r - \lambda k + \frac{n\lambda}{T}, \sqrt{\sigma^2 + \frac{n\delta^2}{T}} \right) \quad (9)$$

Горепосочените спецификации на стойността на опция спрямо различните динамики на базовия актив са свързани с многостъпков алгоритъм за изпълнение с

цел напасването на всички параметри към моделите и възпроизводството на крайна стойност. Очевидно е, че при наличието на множество стъпки, всяка от които съдържа определена степен на сложност, възможността за грешки и произвеждането на нелогични крайни резултати нараства. Дори при правилно извършване на всички процедури, допусканията, въплътени в избраната техника към специфичната структура на оценявания реален актив, могат значимо да се отклоняват от реалността. За тази цел е необходимо да се изгради консистентна методика за обратно тестване (*backtesting*), мониторинг на качеството на данните по време на изпълнението на всяка от стъпките и изграждането на система от предупредителни сигнали, целящи да се прави съпоставка с реално наблюдавани пазарно определени показатели (*reality check*). В таблица 3 е предложен обобщен преглед на стъпките, през които се преминава по време на процеса на оценяване и вземане на крайно решение в зависимост от поставените цели.

Таблица 3. Обобщен преглед на стъпките

Актив за оценка	- Цяло предприятие - Съвкупност от инвестиционни портфейли, всеки от които е оценен като опция - Съвкупност от инвестиционни портфейли, като само инвестицията, притежаваща характеристика на опция, се оценява по този начин, другите активи се оценяват поотделно - Инвестиционен проект
Американски или европейски тип опция	Избор на типа опция в зависимост от актива – кол, пут, степенна, бинарна, спред и т.н.
Определяне на функцията на паричните потоци на оценявания актив	Вземане предвид на синергични ефекти
Моделиране на динамиката на базовия актив	- Избор на модел - Набавяне и обработка на качествена информация - Определяне и калибриране на параметрите към реалните данни - Обратен тест и валидиране (<i>backtesting and reality check</i>)
Интегриране на функцията на паричните потоци спрямо вероятностната мярка на базовия актив	Приложение на подходящи математически техники (числови методи, симулации, приближения и т.н.) за намиране на ценова формула на опцията
Валидиране на резултатите	- Сравнение с борсови цени - Сравнение с други типове оценителски подходи

5. Практическо приложение на опционната техника за оценка на цели предприятия при различна динамика на базовия актив

В настоящата част ще демонстрирам приложението на опционното оценяване върху цяло предприятие посредством използването на два различни процеса, описващи динамиката на базовия актив, а именно корелиран модел на Хестон и скоково-дифузен

ният продукт в повечето случаи е борсово търгуван. При такива ситуации първичната несигурност на паричните потоци зависи почти изцяло от вариацията на цената на добиваната суровина (природен газ, въглища, мед, стомана, други борсово търгувани ценни метали и енергийни стоки и т.н.). Базовите финансови показатели на предприятието в базовата година са представени в приложение 1 и приложение 2.

Приложение 1

ОБОБЩЕН ОТЧЕТ ЗА ФИНАНСОВОТО СЪСТОЯНИЕ

АКТИВИ	Базова година (хил. лв.)
Нетекущи активи	
Дълготрайни материали и нематериални активи	2 340 000
Инвестиции	22 670
Вземания	7 100
Текущи активи	
Материални запаси	490 000
Краткосрочни вземания	81 000
Пари и парични еквиваленти	485 000
ОБЩО АКТИВИ	3 425 770

модел на Мъртон. В допълнение ще бъдат предложени интуитивни и достатъчно добри приближаващи подходи по отношение на калибрирането на параметрите на модела.

Обща постановка на оценяването на предприятието

Както беше споменато, опционната техника за оценка е подходяща да се прилага само и единствено при определени типове реални активи. За целите на разработката и анализа, оценяването на предприятието е с основна дейност **добив, производство и продажба на нефт**, като повечето предприятия от добивната промишленост могат да са обект на оценка посредством използването на опционната техника, тъй като добива-

Структура на паричните потоци

За дефинирането на паричните потоци допускам, че нефтеното находище е развито със сравнително дълъг очакван срок на експлоатация на запаса – около 10 години. Структурата на разходите е относително постоянна величина, като допускам и добро управление на инвестиционните разходи и прогнозируеми нива на амортизационните отчисления. Всички тези показатели могат да се прогнозират на база и на вътрешни разчети и бюджети, в случай че оценяващият има достъп до такава информация. Следователно, цялата несигурност при такива предприятия е капсулирана в приходите от реализацията на основната суровина. Тя от своя страна

ПРИВЛЕЧЕН КАПИТАЛ

Собствен капитал	2 790 000
Нетекущи пасиви	
Лихвоносни задължения	100 000
Други нетекущи пасиви	210 000
Текущи пасиви	
Лихвоносни текущи задължения	180 000
Други текущи пасиви	145 770
ОБЩО ПАСИВИ И СОБСТВЕН КАПИТАЛ	3 425 770

Приложение 2

ОБОБЩЕН ОТЧЕТ ЗА ПЕЧАЛБИТЕ ИЛИ ЗАГУБИТЕ

	Базова година (хил. лв.)
Нетни приходи от продажби	1 200 000
Други доходи	2 000
Постоянни разходи	(367 000)
Променливи разходи	(383 000)
Разходи за амортизации	(180 000)
ЕВИТ	272 000
Разходи за данъци	(28 000)
Нетна печалба за годината	244 000

зависи от варирането на борсовата цена на нефта, както и от потенциала на добивания и пласирания обем. За целите на анализа обемите ще приемам за константни или много слабо вариабилни.

Опционна характеристика на предприятието

Взградената опционна характеристика на оценяваното предприятие ще допусна, че се състои в това, че при ниски борсови цени на нефта предприятието има опцията да прекрати своята оперативна дейност дотогава, докогато цената на нефта се вдигне над ниво, което би по-

крило оперативните и финансови разходи. Следователно, опционната структура на паричните потоци може да бъде представена по следния начин:

$$\Pi = \max[R - FC - VC \pm A, 0] \quad (10)$$

където:

"R" е входящият паричен поток, зависещ от цената на нефта, при допускане за константно количество, "FC" са постоянните разходи, "VC" са променливите разходи и "A" са други корекции в паричните потоци. "Π" е функцията на изплащане (*payoff function*) от опционния характер на предприятието.

Ценова формула на опцията спрямо различните вероятностни процеси

За целите на разработката ще използвам два вероятностни процеса за моделиране на цената на базовия актив, в случая на цената на нефта. Двата избрани процеса са:

- Корелиран модел на Хестон
- Скоково-дифузен модел на Мъртон

Очакваната стойност на опцията в интегрална форма е представена по следния начин:

$$E[V_0] = E[\max(R - FC - VC \pm A, 0)] = \int_{FC-VC \pm A}^{+\infty} [R - FC - VC \pm A] f(R) dR \quad (11)$$

където $f(R)dR$ е вероятностната мярка имплицитно капсулирана в модела на Хестон и скоково-дифузията модел на Мъртон.

Динамиката на възвръщаемостта на цената на актива при Корелирания модел на Хестон е дефинирана по следния начин:

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sqrt{V_t} [\rho dZ_t + \sqrt{1-\rho^2} dW_t] \\ dV_t = k(\theta - V_t)dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_t \\ dW_t dZ_t = \rho dt \end{cases} \quad (12)$$

Моделът е дефиниран и функцията от следните параметри: $r = f(\mu, V, k, \theta, \rho, \sigma)$, където

μ – очакваният тренд (грифт) при риск-неутрална мярка

V – вариацията

k – темпът на „изгърпване“ към средната стойност

θ – дългосрочната средна вариация

ρ – корелацията между двете Браунови движения

σ – волатилността на вариацията

dW_t и dZ_t – двете Браунови движения

Хестон конструира решение на нелинейно частно стохастично диференциално уравнение, направляващо динамиката на опцията посредством характеризиращи функции, като генерализираната ценова

формула наподобява формулата на Блек-Шоулс-Мъртон за кол опция.

$$C(S_0, K, v_0, t) = SP_1 - Ke^{-rt}P_2 \quad (13)$$

където, използвайки решения, базирани на характеризиращите функции, вероятностите P_1 и P_2 са представени по следния начин:

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{inf} R \left(\frac{e^{-i\varphi \ln K} \varphi_j(\ln(S), K, v_0, t, \varphi)}{i\varphi} \right) d\varphi, j \in \{1, 2\} \quad (14)$$

Подробности за извеждането на ценова формула за опция, при която динамиката на базовия актив е дефинирана чрез корелиран процес на Хестон, могат да се намерят в трудовете на Mikhailov и Nogel (2003), Heston (1993) и Crisostomo (2014).

Класическият скоково-дифузен модел е дефиниран по следния начин:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu - \lambda k)dt + \sigma dW_t + (Y_t - 1)dN_t \quad (15)$$

Моделът е функция от следните параметри: $r = f(\mu, \lambda, k, Y)$, където:

μ – очакваният незабавен относителен темп на нарастване на цената (грифт);

σ – стандартното отклонение на относителната промяна на цената при всеки времеви интервал, който не съдържа скок;

λ – интензитетът на скоковете за определен времеви интервал на Поасоновия процес;

$(Y_t - 1)$ – случайна променлива, представяща относителната сила на скоковете на възвръщаемостта на цената, $Y_t \geq 0$;

k – очакваният магнитуд на скоковете – $E[Y_t - 1]$;

dW_t и dN_t – са респективно Брауновото движение за основния дифузен процес и Поасонов процес, генериращ вероятностното разпределение на скоковете на цената, като двата процеса не са корелирани.

Извеждането на ценовата формула на опцията е представено в Точка 4, като същата

Икономически теории

ще бъде използвана и за оценката на предприятието за целите на анализа, а именно:

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda \Delta t} (\lambda \Delta t)^n}{n!} C_{BS} \left(t, S; T, X, r - \lambda k + \frac{n\lambda}{T}, \sqrt{\sigma^2 + \frac{n\delta^2}{T}} \right) \quad (16)$$

Оценяване

За оценката на предприятието, първо ще дефинирам главните показатели, определящи паричните потоци от дейността в **базовата година**: приходите от продажби, постоянните, променливите разходи и показател, показващ всякакви други корекции на паричните потоци, представени нетно (таблица 4).

на стойността на опцията в рамките на дефинирания период, в който предприятието притежава опционната характеристика, настоящата сума на терминалната стойност в след-прогнозния период при допускане, че компанията ще извършва дейност в неопределено дълъг период от време и стойността на други корекции, включващи неоперативни активи, пазарна стойност на лихвоносен дълг (в случай че търсим стойност на собствен капитал) и т.н. Функционално първият обобщен предложен подход за определяне на стойността на компанията е следният:

$$V = \Psi + PTV \pm A \quad (17)$$

където Ψ е стойността на опцията, PTV е

Таблица 4. Главни показатели, определящи паричните потоци от дейността в базовата година

Показател	Стойност (в хил. лв.)
Приходи от продажби (R)	1,200,000
Постоянни разходи (FC)	(547,000)
Променливи разходи (VC)	(383,000)
Други корекции (A)	(120,000)
Нетен поток	150,000

За целите на опционно оценяване сумата на изходящите потоци може да се интерпретира като прицелна стойност (*strike*), а приходите от продажба – като променливата носител на несигурността, като се вижда, че в случая опцията е в пари (*in the money*):

$$S = 1,200,000$$

$$X = (1,050,000)$$

На следващо място е необходимо да се дефинират, заредят с пазарна информация и калибрират параметрите на гвата модела, описващи вариационността на приходите, които в случая са директна функция от борсовата цена на нефта.

Крайната стойност на предприятието би могла да се изведе посредством няколко начина: първият предложен изразява стойността на предприятието като сума

настоящата терминална (продължаваща) стойност и A съдържа всички други необходими корекции в стойността, които могат да варират в широки граници в зависимост от индивидуалните характеристики на оценяваното предприятие.

Вторият предложен начин за достигане до стойността на компанията в рамките на подхода на реални опции се изразява в допускането на прицелен краен срок на съществуване на предприятието – допускане, породено отново от специфики в дейността и бизнеса на компанията. Представянето на стойността е сума на стойността на опцията, настоящата ликвидационна стойност (*salvage value*) на активите в края на периода, през който предприятието притежава опционна характеристика и необходимите други корекции до достигане на търсената пазарна стойност.

$$V = \Psi + SV \pm A \quad (18)$$

където SV е ликвидационната стойност на активите в края на периода.

Съществуват и множество други подходи до достигане на стойността на компанията, прилагайки анализа на реални опции, особено когато структурата и динамиката на паричните потоци, бизнес целите и стратегия на предприятието могат да бъдат представени чрез различни типове опции.

За целите на настоящата разработка ще се придържам към първия представен начин, а именно: $V = \Psi + PTV \pm A$.

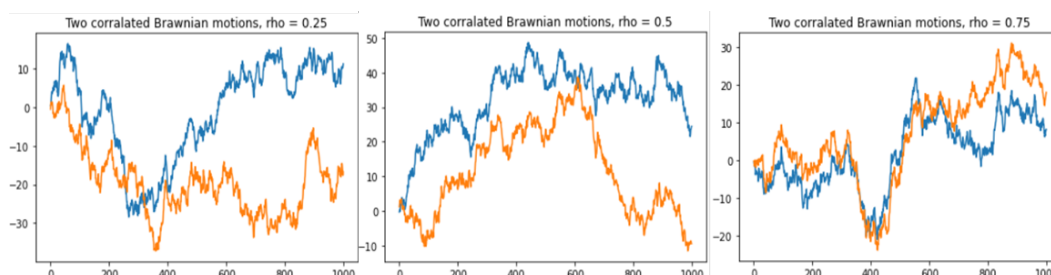
Калибриране на параметрите при модела на Хестон

Параметрите при модела на Хестон са намерени посредством опростен статистически анализ на историческите данни, като очакваният тренд е средно-аритметичната дневна историческа възвръщаемост при непрекъснато олихвяване (лог-възвръщаемост) за период от почти 22 години (23/08/2000 г. –

29/03/2022 г.) или 5422 дневни наблюдения. За същия времеви отрязък е оценено и дневното стандартно отклонение на лог-възвръщаемостта, волатилността на вариацията и дългосрочната вариация. Корелацията между Брауновите движения е получена чрез историческия корелационен коефициент между дневните възвръщаемости и цената на актива, като е важно да се отбележи, че при различна честота на наблюдението този показател варира, като при годишна честота корелационният коефициент скача на 11.39%. Корелацията между двете Браунови движения графично е представена при различни корелационни коефициенти (при $\rho = 25\%, 50\%$ и 75%) на фигура 1.

Таблично параметрите на модела са представени в таблица 5.

На графиките във фигура 2 е изобразено нагледно сравнение между реалните дневни цени и възвръщаемости на нефта и прогнозни симулирани дневни цени и възвръщаемост при корелиран модел на Хестон.



Фигура 1. Корелация между двете Браунови движения

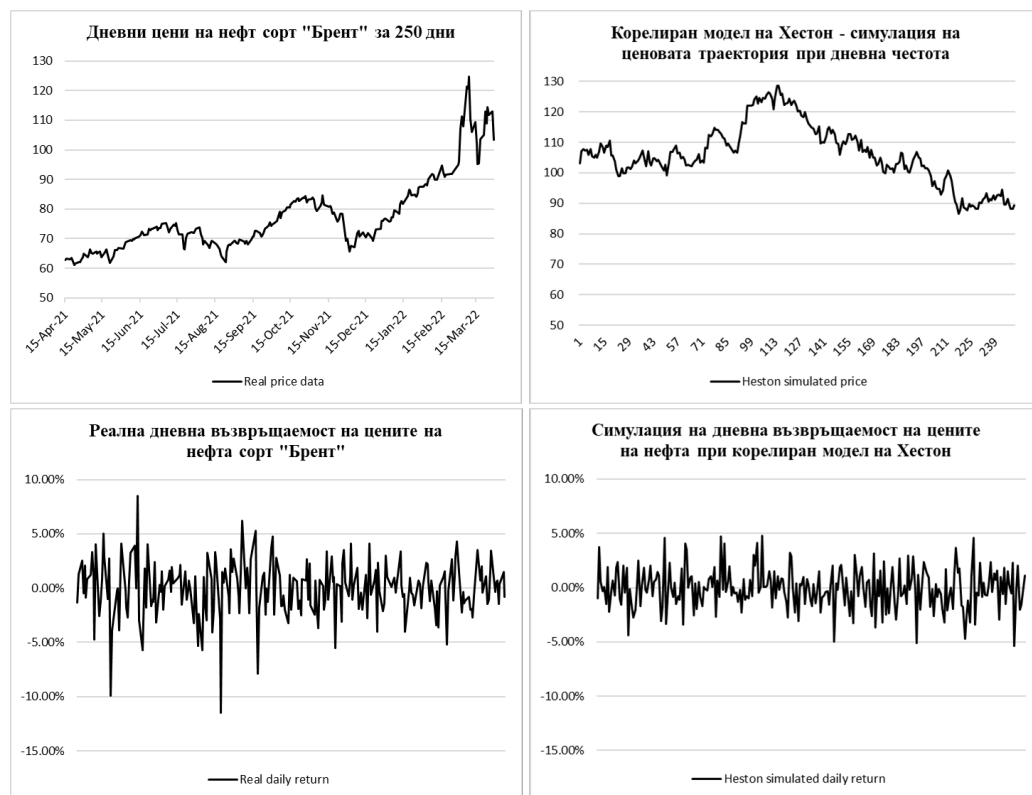
Таблица 5. Параметри на модела

St	Реална цена в нулевия момент	104.24
μt	Очакван тренд	0.02%
$\sqrt{V}$	Стандартно отклонение	2.77%
r	Дневна безрискова норма на възвръщаемост	0.01%
k	Темп на издърпване към средната стойност	1.57
θ	Дългосрочна вариация	0.000765
σ	Волатилността на вариацията	3.64%
ρ	Корелация между Брауновите движения	2.45%

Икономически теории

Крайната оценка на опцията посредством модела на Хестон се извежда чрез *Уравнение 13 и 14* и зареждането на данните посредством таблица 4 и таблица 5, като важно е

10% и другите корекции нето (неоперативна стойност на активите, пари и парични еквивалентни, инвестиционни имоти, инвестиции в дъщерни дружества и лихвоносен дълг).



Фигура 2. Сравнение между реалните дневни цени и възвръщаемости на нефта и прогнозни симулирани дневни цени и възвръщаемост при корелиран модел на Хестон

да се спомене, че тъй като данните от таблица 5 са оценени на база дневна честота, за целите на зареждането им в опционния модел е нужно същите да бъдат коригирани до техните кореспондиращи годишни стойности. Крайната опционна оценка е **729,054** хил.лв.

Крайната стойност на предприятието, прилагайки *Уравнение 17*, е равна на стойността на опцията 729,054 хил. лв. плюс настоящата терминална стойност, получена при допускане на нарастване на след-прогнозните парични потоци от 1% на годишна база и средно-претеглена цена на капитала от

$$V = \Psi + PTV \pm A = 729,054 + 989,115 + 227,670 = \mathbf{1,945,839 \text{ хил. лв.}}$$

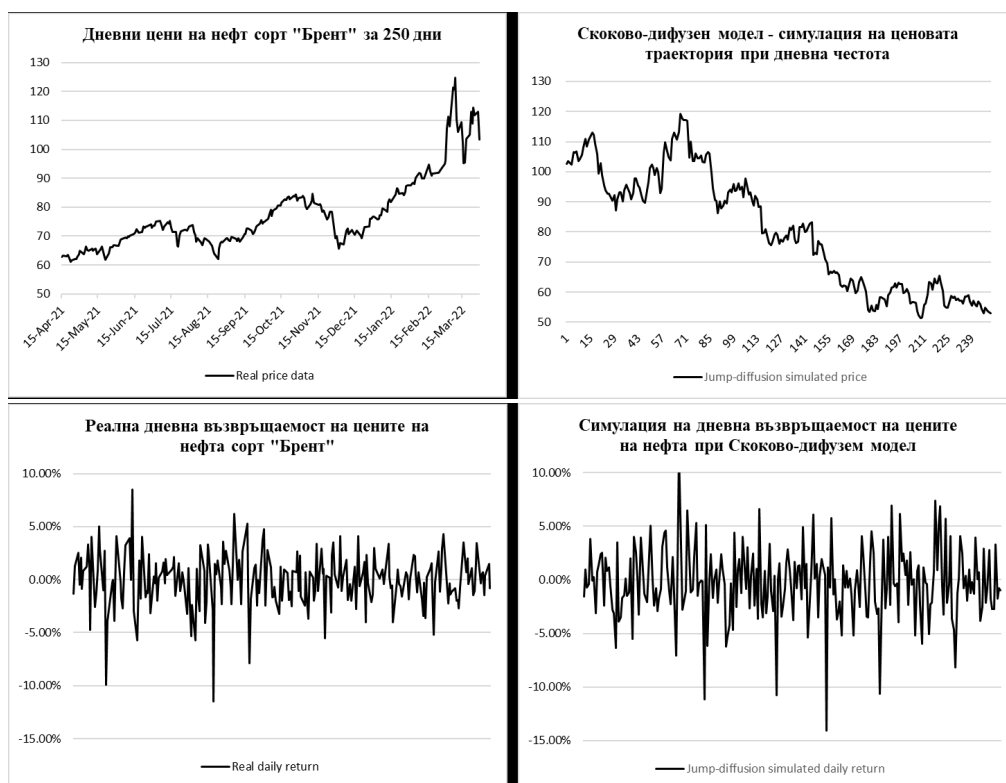
Калибриране на параметрите при модела на Мъртон

Параметрите при скоково-дифузия модел на Мъртон са оценени по следния начин: Базовата цена на нефта е определена на база стойността и към 29/03/2022 г. равна на 104,24 долара за барел; очакваното моментално непрекъснато нарастване на възвръщаемостта на цената на петрола, както и дневното стандартно отклонение

на възвръщаемостта са определени на база класически исторически статистически дескриптивен анализ и са в размер респективно на 0,02% и 2,77%; средната стойност на силата на скоковете, измерена като процент от цената, е равна на 1%; стандартното отклонение на скоковете е равно на 5%; честотата на скоковете – ламбда, коя-

в рамките на една година и симулираната посредством модела на Мъртон такава.

Ясно може да се види, че визуално моделът доса правдоподобно имитира дневната динамика на цената и особено на възвръщаемостта на този тип актив, следователно за целите на настоящия пример ще бъде използван за основен в рамките на опционно оценяване.



Фигура 3. Сравнителен анализ между реалната дневна динамика в рамките на една година и симулираната посредством модела на Мъртон динамика

то е основен параметър в Поасоновия процес в рамките на една година, е равна на 5.

След зареждането на модела с оценените параметри, графично симулирана ценова траектория и съответстващата ѝ възвръщаемост могат да се онагледят посредством графиките във фигура 3, като в същото време може да се направи сравнителен анализ между реалната дневна динамика

Крайната оценка на опцията посредством скоково-дифузия модел на Мъртон се извежда чрез *Уравнение 15* и *16* и зареждането на данните посредством *Таблица 4*. Крайната опционна оценка е **740,969** хил.лв.

Крайната стойност на предприятието, прилагайки отново *Уравнение 17*, е равна на:

$$V = \Psi + PTV \pm A = 740,969 + 989,115 + 227,670 = \mathbf{1,957,754}$$
 хил. лв.

6. Заключение

Основната застъпена цел на разработката е свързана с използването и приложенията на опционната техника за анализ и оценка по отношение на реални активи. Втората подзадача е свързана с прегледа на най-често използваните походи за определяне на динамиката на базовия актив. Съществуват достатъчно обективни емпирични доказателства, че поведението на цените на активите не се подчинява на класическите финансови теории и модели (които са в основата на оценяването на деривати), което от своя страна би могло да доведе до изкривяване и разрыв между прогнозираните резултати и действителността.

В практическата част техниката на реалните опции беше приложена върху така избрано предприятие, което в достатъчна степен да обхване и изтъкне на преден план ключовите аспекти и специфики, спрямо които структурата на несигурността, нелинейността в потенциала за генериране на ползи при непроменливи разходи да бъдат транспонирани и взети предвид при оценката на цели предприятия. Представих оценка на предприятие, при което динамиката на основния източник на несигурност беше моделиран посредством два процеса – корелиран модел на Хестон и скоково-дифузен модел на Мъртон. И двата модела имат своите предимства и слабости по отношение на тяхното конструиране и оценяване на параметрите към пазарна информация. Въпреки това, така разгледаните два процеса са едни от практически приложимите в областта на финансите, като може да се отбележи, че в избрания пример скоково-дифузният модел показва по-добра обяснителна способност, изразявайки се в способността му да обхване скоковото поведение на описвания актив. Стойностното изражение на двата модела в рамките на опционната техника показва незначителна разлика в стойността между тях (пог 2%).

Незасегнати области и задачи за бъдещи изследвания

Извън обхвата на разработката останали някои изключително интересни и ключови области, методи и похвати, способстващи усъвършенстването на анализа при прилагането на опционната техника в оценяването. Някои от тях са:

- Важен аспект при конструирането на определен финансов модел е изборът и прилагането на релевантен подход за оценяване и калибриране на параметрите на модела към пазарно наблюдавани данни. Тестовите за адекватност на параметрите, функционалната зависимост на самите модели и арсеналът от количествени тестове за проверка на прогностичната сила на моделите останали извън обхвата на настоящата разработка. Всички параметри в рамките на изследването бяха напаснати посредством базов дескриптивен статистически анализ на достатъчно дълги времеви редове.
- Не беше засегнато в **гетайли** математическите специфики и икономически допускания при интегрирането на вероятностните модели в рамките на опционната техника и извеждането на ценова формула.
- Една от най-важните части от анализа е последващата проверка на адекватността на генерираната крайна стойност. Рискът от превръщането на един такъв анализ в „черна кутия“ е имплицитно заложен поради по-високата сложност на моделите. Именно поради това изграждането на достатъчно добра система за последваща проверка на адекватността и правдоподобността на оценката е от голямо значение.

Прилагането на алтернативен подход в сферата на оценяването на различни активи може да доведе до значително по-релевантни оценки и вземането на информирани инвестиционни решения. Във все по-разви-

ващите се финансови пазари неминуемо разнообразието от финансови и реални активи расте, а с това и обяснението на тяхното поведение придобива нови измерения. Настоящата разработка постави акцент именно към подходите и някои от моделите за описание и прогнозиране на поведението на цените и техните възвръщаемости на различните активи в по-широка рамка, а именно в областта на оценяването и по-специално приложението на опционната методология за оценка на цели предприятия.

Графиките във фигура 1 и числовите решения на опционната стойност при процес на Хестон и моделът на Мъртон (Уравнения 13, 14 и 16) са реализирани с помощта на софтуерен прогнук Python – <https://colab.research.google.com/notebooks/intro.ipynb>

Числовите стойности, визуализирани в графиките на фигура 2 и фигура 3, са реализирани посредством стандаартен софтуерен прогнук Excel.

Цитирани източници:

Amram, M., N. Kulatilaka, 1999. Real Options: Managing Strategic Investment in an Uncertain World.

Baron-Adesi, G., R.E. Whaley, 1987. Efficient Analytical Approximation of American Option Values. *The Journal of Finance* Vol. XLII, NO. 2, June 1987.

Brooks, C., 2008. Introductory Econometrics for Finance, 2nd edition, Cambridge University Press.

Bollerslev, T., 1986. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31 (1986) 307-327. North-Holland.

Bjerkstrand, P., G. Stensland, 2002. Closed-Form Valuation of American Options, Technical Report, Norwegian School of Economics and Business Administration, Bergen.

Cox, J.C., S.A. Ross, M. Rubinstein, 1979. Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, Sep. 1979.

Crisostomo, R., 2014. An Analysis of the Heston Stochastic Volatility Model: Implementation and Calibration using Matlab. CNMV Working Paper No. 58 (December 2014).

Carr, P., D.B. Madan, 1999. Option Valuation Using the Fast Fourier Transform. *Journal of Computational Finance*, Volume 2/Number, Summer 1999.

Damodaran, A., 2003. Investment Valuation: Tools and Techniques for Determining the Value of Any Assets, 3rd edition.

Das, S.R., R.K. Sundaram, 1998. Of Smiles and Smirks: A Term-Structure Perspective. *Journal of Financial and Quantitative Analysis (JFQA)*, Vol. 34, No. 2, 1999.

Dixit, A.K., R.S. Pindyck, 1994. Investment under Uncertainty, Princeton University Press.

Derman, E., N.N. Taleb, 2005. The Illusions of Dynamic Replication. *Quantitative Finance*, August 2005.

Deng, S., 1998. Stochastic Models of Energy Commodity Prices and Their Applications: Mean-reversion with Jumps and Spikes, <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.374.8932&rep=rep1&type=pdf>

Eydeland, A., K. Wolyniec, 2003. Energy and Power Risk Management – New Development in Modeling, Pricing and Hedging, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.

Engle, R.F., 1982. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, Volume 50, Issue 4 (Jul., 1982), 987-1008.

Hull, J., A. White, 1987. The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *The Journal of Finance*, Volume 42, Issue 2 (Jun., 1987), 281-300.

Heston, S.L., 1993. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *The Review of Financial Studies* 1993, Volume 6, number 2, pp. 327-343.

- Heston, S.L., S. Nandi, 1997. A Closed-Form GARCH Option Valuation Model, Federal Reserve Bank of Atlanta, Working Paper 97-9, November 1997.
- Haug, E.G., 1997. The Complete Guide to Option Pricing Formulas, McGraw-Hill.
- Kou, S.G., H. Wang, 2001. Option Pricing Under a Double Exponential Jump Diffusion Model, Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=284202>
- Lamberton, D., B. Lapeyre, 2008. Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance, 2nd edition, Chapman & Hall/CRC Taylor & Francis Group.
- Merton, R.C., 1976. Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous. *Journal of Financial Economics* 3 (1976) 125-144, North-Holland Publishing Company.
- Mikhailov, S., U. Nogel, 2003. Heston's Stochastic Volatility Model Implementation, Calibration and Some Extensions, Fraunhofer Institute of Industrial Mathematics, Kaiserslautern, Germany – https://www.maths.univ-evry.fr/pages_perso/crepey/Finance/051111_mikh%20heston.pdf
- Nelson, D.B., 1991. Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. *Econometrica*, Vol. 59, No. 2. (Mar.,1991), pp. 347-370.
- Samuelson, P.A., 1965. Rational Theory of Warrant Pricing. *Industrial Management Review*, 6:2, 1965, Spring, p. 13.
- Stein, E.M., J.C. Stein, 1991. Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach. *The Review of Financial Studies* 1991, Volume 4, number 4, pp. 727-752.
- Taleb, Nassim N., 2015. Unique Option Pricing Measure with neither Dynamic Hedging nor Complete Markets.
- Taleb, N.N., 1997. Dynamic Hedging: Managing Vanilla and Exotic Options, John Wiley&Sons, Inc.
- Zaevski, T.S., 2021. A New Approach for Pricing Discounted American Options, ELSEVIER.